I. Grupos de Lie

Emmanuel Briand

29 de junio de 2015

Plano de esta lección:

- Grupos en general, grupos de transformaciones.
- Grupos de matrices.
- Grupos de Lie.
- Álgebras de Lie.

Grupos

Sea X un conjunto, finito (como por ejemplo $X = \{1, 2, 3\}$) o infinito (como por ejemplo un espacio vectorial). Consideramos las *transformaciones biyectivas de* X (las biyecciones de X en X). Recordamos que son las aplicaciones de X en X que cumplen la condición: cada elemento de X es la imagen de exactamente un elemento.

Ejemplo 1. Para $X = \{1, 2, 3\}$, las transformaciones biyectivas de X son las 6 aplicaciones representadas por los diagramas en la figura 1 (a).

Una de ellas es la *identidad* (la transformación que no mueve nada). Dado cualquier par de transformaciones biyectivas de X, f y g, podemos componerlas (c), dando lugar a una nueva transformación biyectiva $f \circ g$. Dada cualquiera de estas transformaciones biyectivas f, podemos producir otra cambiando el sentido de las flechas: esta nueva transformación biyectiva es la *inversa* f^{-1} de la transformación original (c).

El conjunto de las transformaciones biyectivas de un conjunto X tiene las propiedades siguientes:

- Contiene la transformación identidad id, definida por: $\mathrm{id}(x) = x$ para todo $x \in X$.
- Para cualquier par de transformaciones biyectivas f y g de X, la aplicación compuesta $f \circ g$ definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ para todo } x \in X$$

  es también una transformación biyectiva de X.
- Para cualquier f transformación biyectiva de X, hay otra transformación biyectiva f^{-1}, que asocia a cualquier $x \in X$ su único antecedente por f, es decir el único elemento y tal que $f(y) = x$. Se cumplen las identidades:

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}, f^{-1} \circ f = \mathrm{id}\,.$$

Definición 1 (Grupo de transformaciones)**.** Sea X un conjunto. Un *grupo de transformaciones de* X es un conjunto G de transformaciones biyectivas de X que cumple las tres propiedades siguientes:

- Contiene la transformación identidad.
- Para cualquier par de elementos f, g de G, su composición $f \circ g$ está en G.
- Para cualquier f en G, su inversa f^{-1} está en G.

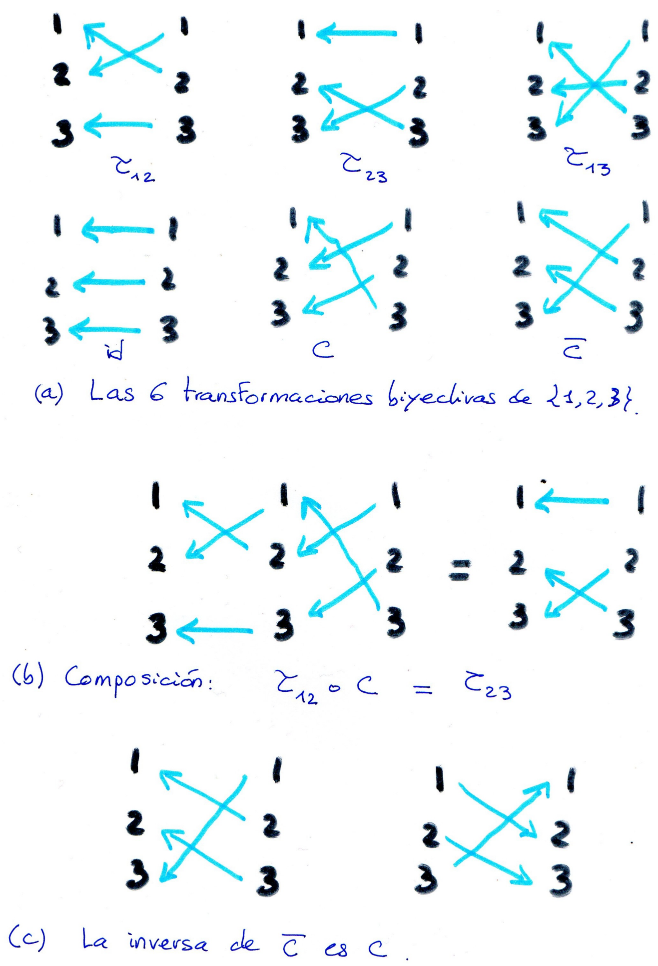

Figura 1: Las transformaciones biyectivas del conjunto $\{1, 2, 3\}$.

Ejemplo 2. Sea V un espacio vectorial. Sea $GL(V)$ el conjunto de las aplicaciones lineales de V en V ("endomorfismos de X") que son biyectivas. Entonces $GL(V)$ es un grupo de transformaciones de V ya que:

- La transformación identidad es lineal, pertenece a G.
- Si f y g son dos aplicaciones lineales de V en V entonces $f \circ g$ es lineal, y por otra parte si f y g son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva también. Por tanto, si f y g están en G, se tiene $f \circ g \in G$ también.
- Si f es una transformación lineal biyectiva de V, se demuestra fácilmente que f^{-1} es lineal también.

Definición 2 (Grupo)**.** Sea G un conjunto cualquiera, con una operación $*$ (es decir una aplicación $G \times G \to G$). Decimos que G (equipado con $*$) es un grupo cuando hay una biyección φ desde un grupo de transformaciones G' en G con la propiedad:

$$\varphi(f \circ g) = \varphi(f) * \varphi(g) \text{ para todos } f, g \text{ en } G'.$$

Ejemplo 3 (El grupo de las matrices regulares de orden n)**.** Sea n un entero positivo. El conjunto $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de las matrices cuadradas

A de orden n (con n filas y n columnas) con coeficientes complejos. Está equipado de la operación de multiplicación de matrices. La matriz A es *regular* cuando admite una inversa.

Sea $GL(n, \mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ el subconjunto de las matrices regulares. Equipado de la multiplicación usual de matrices, es un grupo: está en biyección con el grupo de los endomorfismos biyectivos de $\mathbb{C}^n$ por medio de la aplicación φ que a cada endomorfismo asocia su matriz respecto de la base canónica, ya que la matriz de un producto de endomorfismos es el producto de sus matrices.

Un morfismo de grupos es una aplicación entre grupos que "se comporta bien" con las estructuras de grupos.

Definición 3. Sean G y H dos grupos de transformaciones. Sea F una aplicación de G en H. Decimos que F es un *morfismo de grupos* del grupo G hacia el grupo H cuando se cumplen:

Se tiene $F(f \circ g) = F(f) \circ F(h)$ para todos $f, g \in G$.

Decimos que F es un *isomorfismo* de grupos G sobre H cuando se cumplen las condiciones:

1. La aplicación F es biyectiva.
2. La aplicación F es un morfismo de grupos.
3. La aplicación inversa F^{-1}, de H en G, es también un morfismo de grupos.

(Se demuestra fácilmente que las dos primeras condiciones implican la tercera.)

Decimos que los grupos G y H son *isomorfos* cuando existe un isomorfismo de grupos de G sobre H. La idea es que dos grupos G y H son "esencialmente los mismos", excepto por los nombres de sus elementos.

Grupos de matrices

Ya hemos introducidos los grupos generales lineales $GL(n, \mathbb{C})$. A continuación, introducimos otras familias importantes de grupos de matrices.

Nos permitiremos identificar en el resto del curso $GL(n, \mathbb{C})$ (grupo de matrices) con $GL(\mathbb{C}^n)$ (grupo de endomorfismos biyectivos) y trataremos así los "grupos de matrices" como grupo de transformaciones.

Grupos especiales lineales

Sea $SL(n, \mathbb{C})$ el subconjunto de $GL(n, \mathbb{C})$ formado por las matrices de determinante 1. Es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ como consecuencia de las identidades:

1. $\det(I) = 1$.

2. $\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$.

3. $\det(M^{-1}) = 1/det(M)$.

Igualmente se define $SL(n, \mathbb{R})$ como el subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ (matrices cuadradas de orden n a coeficientes reales) formado por las matrices de determinante 1.

Los grupos $SL(n, \mathbb{R})$ y $SL(n, \mathbb{C})$ son los grupos eSpeciales Lineales (reales y complejos, respectivamente).

Grupos ortogonales

Consideramos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$ equipado con su producto escalar usual. Las isometrías lineales de $\mathbb{R}^n$ son los endomorfismos que "conservan la norma euclídea", es decir que cumplen:

$$||f(u)|| = ||u|| \text{ para cualquier } u \text{ en } \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Es inmediato comprobar que las isometrías lineales de $\mathbb{R}^n$ son todas biyectivas y que forman un grupo de transformaciones.

El grupo de matrices que les corresponde por la biyección φ del ejemplo 3 es el grupo $O(n)$ de las *matrices ortogonales*. Este grupo se llama "grupo ortogonal".

La condición (1) es equivalente a:

$$\langle f(u)|f(v)\rangle = \langle u|v\rangle \text{ para todos } u, v \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

(las isometrías lineales son los endomorfismos que preservan el producto escalar). Se deduce que las matrices ortogonales son las matrices $O \in GL(n, \mathbb{R})$ que cumplen:

$$O^t O = I$$

Esta identidad tiene la siguiente interpretación: las matrices ortogonales son aquellas cuyas columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Grupos unitarios

En vez de considerar $V = \mathbb{R}^n$ con su producto escalar, consideramos $V = \mathbb{C}^n$ con su producto escalar hermítico usual. Las isometrías lineales para la norma asociada a este producto escalar hermítico corresponden a las matrices $U \in GL(n, \mathbb{C})$ que cumplen:

$$U^* U = I$$

Estas matrices se llaman *matrices unitarias* y forman el *grupo unitario* $U(n)$.

Grupos especiales ortogonales y especiales unitarios

Los endomorfismos f de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) que cumplen ambas condiciones:

1. son isometrías,

2. tienen determinante 1,

forman un grupo de transformaciones, que corresponde al grupo de matrices $O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ (resp. $U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$). Este grupo es el *grupo especial ortogonal* $SO(n)$ (resp. *grupo especial unitario* $SU(n)$).

Ejercicio 1. Las matrices ortogonales son aquellas cuyas columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Utilizar esta propiedad para obtener que los elementos de $O(2)$ (matrices ortogonales de orden 2) son las de los tipos:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Deducir que $SO(2)$ es el conjunto de las matrices del primer tipo.

Demostrar similarmente que $SU(2)$ es el conjunto de las matrices no-nulas del tipo:

$$\begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix} \text{ para } a, b \in \mathbb{C} \text{ tal que } |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Esta condición, que recuerda la condición $\cos(\theta)^2 + \operatorname{sen}(\theta)^2 = 1$, sugiere poner

$$a = \cos(\theta)e^{i\alpha}, b = \operatorname{sen}(\theta)e^{i\beta}, \text{ con } \theta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

¿Que forma este cambio de variable da a las matrices de $SU(2)$?

Grupos simplécticos

Otra familia de grupos importante es la de los *grupos simplécticos* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$. No los definiremos ni les usaremos en este curso.

Matrices diagonales, matrices triangulares superiores

Los subconjuntos siguientes de $GL(n, \mathbb{C})$ o $GL(n, \mathbb{R})$ son subgrupos:

- las matrices diagonales regulares (= sin 0 en la diagonal).
- las matrices triangulares superiores regulares (= sin 0 en la diagonal).
- las matrices triangulares superiores con diagonal de 1.

Ejercicio 2. Para $n = 2$, el subgrupo de las matrices triangulares superiores con diagonal de 1 es de las matrices de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Establecer las formulas para el producto y la inversa en este subgrupo. Hacer la misma cosa para las matrices triangulares con diagonal de 1, de orden 3.

Grupos de Lie

Variedades

Los grupos de matrices introducidos previamente son subconjuntos del espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de las matrices cuadradas de orden n, a coeficientes reales o complejos. Tienen una estructura geométrica de "variedades'. Las variedades son las curvas lisas, superficies lisas, y objetos análogos de dimensión superior... No detallamos más.

Ejemplo 4. El grupo $SO(2)$ es exactamente el conjunto de las matrices que pueden escribirse de la forma

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \text{con } \theta \text{ en } \mathbb{R}.$$

En el conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (un espacio vectorial de dimensión 4) es un círculo en el plano de ecuaciones $a_{11} = a_{22}$, $a_{21} = -a_{12}$).

El grupo $O(2)$ es la unión de dos círculos.

Ejercicio 3. El grupo $SU(2)$ es el grupo de las matrices

$$\begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{C}$ tal que $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Introducir las partes reales e imaginarias de a y b para identificar $SU(2)$ con un objeto geométrico conocido.

Grupos de Lie

Definición 4. Sea G un grupo de transformaciones que tiene al mismo tiempo una estructura de variedad. Es un grupo de Lie cuando las dos aplicaciones:

- multiplicación (de $G \times G$ hacia G): $(f, g) \mapsto f \circ g$,
- inversión: (de G hacía G): $f \mapsto f^{-1}$

son "lisas" (diferenciables, en un sentido a precisar).

Se consideran dos tipos de "variedades" y por tanto de grupos de Lie, con las aplicaciones "lisas" que corresponde:

- Variedades reales $\mathcal{C}^\infty$, cuyas funciones lisas son las funciones que admiten derivadas de todos ordenes.
- Variedades analíticas complejas, cuyas funciones lisas son las funciones analíticas complejas = holomorfas.

A cada una de estos tipos corresponde una noción de grupo de Lie: grupos de Lie ($\mathcal{C}^\infty$) reales y grupos de Lie (analíticos) complejos.

Ejemplo 5. El grupo $GL(n,\mathbb{C})$ es un grupo de Lie complejo. En efecto, es una variedad compleja de dimensión n^2, obtenida de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quitando el subconjunto de ecuación $\det(M) = 0$. El espacio tangente en cada $M \in GL(n,\mathbb{C})$ se identifica con el mismo $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

La multiplicación de matrices y la inversión son dadas por formulas analíticas (con la formula "traspuesta de la matriz de los menores máximos dividida por el determinante" para la inversión). Por ejemplo, para $n = 2$, si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \text{ con } AB = C.$$

entonces los coeficientes c_{ij} son dados por las formulas polinomiales (por tanto analíticas):

$$\begin{cases} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{cases}$$

Sea

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix},$$

la inversa de A. Sus coeficientes son dadas por las funciones racionales (por tanto analíticas):

$$\begin{cases} a'_{11} &= a_{22}/(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ a'_{22} &= a_{11}/(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ a'_{12} &= -a_{12}/(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ a'_{21} &= -a_{21}/(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \end{cases}$$

Igualmente, $GL(n,\mathbb{R})$ es una variedad real de dimensión n^2.

Los grupos presentados anteriormente son también variedades, can algunas sutilezas:

- $SL(n,\mathbb{C})$ es una variedad compleja.
- $O(n)$, $SO(n)$, $SL(n,\mathbb{R})$ son variedades reales.
- $U(n)$ y $SU(n)$ son variedades reales, pero no son variedades complejas.

Las variedades $U(n)$ y $SU(n)$, a pesar de ser grupos de matrices complejas, no son variedades complejas. Por ejemplo, $U(2)$ es el conjunto de las matrices no–nulas que cumplen:

$$\begin{cases} |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 &= 1 \\ |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 &= 1 \\ \bar{a}_{11}a_{12} + \bar{a}_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

Pero las funciones $z \mapsto |z|$ y $z \mapsto \bar{z}$ no son analíticas complejas.

CAVEAT: Los grupos de matrices anteriores son subconjuntos del espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (matrices cuadradas de orden n a coeficientes reales o complejos), definidas por ecuaciones polinomiales. No basta, a priori, para demostrar que son variedades (lisas). No detallamos este punto.

En cambio, si introducimos las partes reales e imaginarias de los coeficientes a_{jk}: $a_{jk} = x_{jk} + iy_{jk}$, vemos $U(2)$ como el subconjunto de $\mathbb{R}^4$ formado por los elementos no nulos que cumplen:

$$\begin{cases} x_{11}^2 + y_{11}^2 + x_{21}^2 + y_{21}^2 & = & 1 \\ x_{12}^2 + y_{12}^2 + x_{22}^2 + y_{22}^2 & = & 1 \\ x_{11}x_{12} + y_{11}y_{12} + x_{21}x_{22} + y_{21}y_{22} & = & 0 \\ x_{11}y_{12} - y_{11}x_{12} + x_{21}y_{22} - y_{21}x_{22} & = & 0 \end{cases}$$

La variedad $U(2)$ es una variedad real.

Espacio tangente, dimensión

Queremos determinar, para los ejemplos anteriores de grupo de Lie, el espacio tangente en la identidad. Sirve, por ejemplo, para calcular la dimensión de la variedad (es la dimensión del espacio tangente). Pero, mucho más importante, nos servirá para introducir el álgebra de Lie de un grupo de Lie, que es simplemente este mismo espacio tangente a la identidad, equipado de una estructura algebraica.

Para determinar un espacio tangente en un punto una variedad inmersa en un espacio vectorial, podemos utilizar o bien una parametrización en el entorno de este punto, o bien un sistema de ecuaciones que define la variedad. Lo hacemos de las dos maneras para el grupo $SL(2,\mathbb{C})$.

CAVEAT: Omitimos comprobaciones sobre la regularidad de la parametrización/del sistema de ecuaciones en el entorno de la identidad

Ejemplo 6 (Espacio tangente a la identidad para el grupo $SL(2,\mathbb{C})$)**.** El grupo $SL(2,\mathbb{C})$ esta formado por las matrices del tipo

$$M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

que cumplen $xt - yz = 1$. Cerca de la identidad, tenemos $x \neq 0$, por tanto podemos escribir $t = (1+yz)/x$. Tenemos por tanto la parametrización:

$$(x,y,z) \to \begin{bmatrix} x & y \\ z & (1+yz)/x \end{bmatrix}$$

La matriz identidad corresponde a los valores de las parámetros $x = 1$, $y = z = 0$. Para obtener una aproximación lineal cerca de

$x = 1$, introducimos h tal que $x = 1 + h$. Entonces

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 1+h & y \\ z & (1+yz)/(1+h) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+h & y \\ z & (1+yz)\cdot(1-h) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+h & y \\ z & 1-h \end{bmatrix} + o(y,z,h) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h & y \\ z & -h \end{bmatrix} + o(y,z,h) \\ &= I + h\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + o(y,z,h). \end{aligned}$$

El espacio tangente a $SL(2,\mathbb{C})$ a la identidad es, por tanto, el subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ generado por las tres matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es un subespacio de dimensión 3, por tanto $SL(2,\mathbb{C})$ tiene dimensión 3. De las tres matrices anteriores, se dice que forman un sistema de *generadores infinitesimales* para el grupo $SL(2,\mathbb{C})$ (= un sistema de generadores del espacio vectorial tangente en la identidad).

Realizamos ahora el mismo cálculo a partir de la ecuación $xt - yz = 1$. Para esto calculamos la aproximación lineal L de la función $f(x,y,z,t) = xt - yz$ cerca de $(x,y,z,t) = (1,0,0,1)$: $L = 0$ será la ecuación del espacio tangente.

Introducimos $h = x - 1$, $k = t - 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} f(1+h,y,z,1+k) &= (1+h)(1+k) - yz \\ &= 1 + h + k + hk - yz \\ &= 1 + h + k + o(h,k,y,z) \end{aligned}$$

Por tanto la aproximación lineal de f al punto considerado es $L(h,y,z,k) = h + k$, y el espacio tangente a la identidad de $SL(2,\mathbb{C})$ es el conjunto de las matrices $\begin{bmatrix} h & y \\ z & k \end{bmatrix}$ que cumplen $h + k = 0$. Es el conjunto de las matrices de traza nula. Los generadores infinitesimales encontrados anteriormente forman bien una base de este espacio.

Ejercicio 4. Generalizar el ejemplo anterior para determinar que el espacio tangente a $SL(n,\mathbb{C})$ a la identidad es el conjunto de las matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de traza nula (el ejemplo anterior corresponde a $n = 2$). Utilizar para esto que $SL(n,\mathbb{C})$ está definida por

$$\det M = 1$$

y que tenemos para la función determinante la aproximación lineal $\det(I + H) = 1 + \mathrm{Traza}(H) + o(H)$.

Ejercicio 5. Utilizar la parametrización $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ de $SO(2)$ para obtener su espacio tangente a la identidad.

Ejemplo 7 (El espacio tangente a $O(n)$ en la identidad)**.** Para determinar el espacio tangente en la identidad a $O(n)$ utilizamos que $O(n)$ es el conjunto de las matrices en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumplen:

$$O^t O = I$$

Ponemos $O = I + M$. Entonces

$$O^t O = (I + M)^t (I + M) = I + M^t + M + M^t M = I + (M^t + M) + o(M).$$

Por tanto el espacio tangente a $O(n)$ en la identidad es el conjunto de las matrices que cumplen $M + M^t = 0$: son las matrices antisimétricas. Tiene dimensión $(n^2 - n)/2$. Es la dimensión de $O(n)$.

Ejercicio 6. Hallar, de la misma manera, los espacios tangente a $U(n)$ y $SU(n)$ en la identidad (se debe obtener el espacio de las matrices antihermíticas y el espacio de las matrices antihermíticas de traza nula, respectivamente). Deducir la dimensión (real) de $U(n)$ y $SU(n)$.

Ejemplo 8 (Generadores infinitesimales para $U(2)$ y $SU(2)$)**.** El espacio tangente en la identidad a $SU(2)$ es el conjunto de las matrices antihermíticas de traza nula de orden 2. Son las matrices de la forma

$$i \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix} \text{ con } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

(las matrices antihermíticas son las matrices hermíticas multiplicadas por i). Descomponiendo como combinación lineal con coeficientes x, y y z, obtenemos:

$$x \cdot i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y \cdot i \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + z \cdot i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Las tres matrices que aparecen en esta descomposición son las *matrices de espín de Pauli*:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x, \quad \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \sigma_y, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \sigma_z$$

Las matrices $i\sigma_x$, $i\sigma_y$, $i\sigma_z$ forman un sistema de generadores infinitesimales para $SU(2)$. Un sistema de generadores infinitesimales para $U(2)$ es obtenido adjuntando la matriz identidad.

Exponencial

La función numérica exponencial es suma de una serie convergente (con un radio de convergencia infinito):

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Se define igualmente la exponencial de una matriz cuadrada:

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Ejercicio 7. Calcular con esta formula la exponencial de las matrices siguientes:

1. la matriz
$$T = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. la matriz diagonal
$$D = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

3. la matriz
$$M = \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ 20 & -11 \end{bmatrix}$$

   Para esto, utilizar que
$$M = P\Delta P^{-1} \text{ con } P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   El cálculo se simplifica, ya que $M^2 = P\Delta P^{-1} P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1}$, etc . . .

La exponencial proporciona una parametrización de los grupos de Lie de matrices cerca de la identidad:

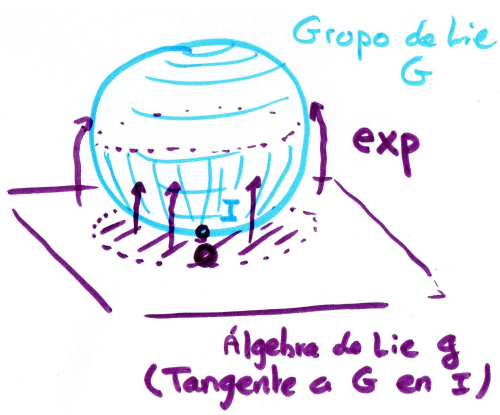

Figura 2: Un grupo de Lie, su espacio tangente en la identidad y la exponencial.

Teorema 1. *Sea G un grupo de Lie de matrices y T su espacio tangente a la identidad. Entonces*

1. *la aplicación exponencial manda T en G,*
2. *establece un difeomorfismo (biyección lisa con inversa lisa) entre un entorno U de 0 en T y un entorno V de la identidad* id *en G.*
3. *Si el grupo G es conexo, entonces cualquier elemento de G es producto de elementos de V.*

Álgebras de Lie

El Álgebra de Lie de un grupo de Lie

A continuación damos al espacio tangente en la identidad a un grupo de Lie de matrices una estructura algebraica: le proporcionamos un producto llamado "corchete de Lie".

Sea G un grupo de Lie de matrices y T su plano tangente en la identidad. Consideramos dos elementos A, B de T. Entonces, para t pequeño, los elementos $\exp(tA)$ y $\exp(tB)$, y su producto $\exp(tA)\exp(tB)$, están cerca de I: en el entorno V del teorema 1.

Existe por tanto, una matriz familia de matrices $C(t)$ de T, tal que para cualquier t suficientemente pequeño,

$$\exp(tA)\exp(tB) = \exp(C(t))$$

Intentamos determinar $C(t)$ desarrollando $\exp(tA)\exp(tB)$:

$$\begin{aligned}\exp(tA)\exp(tB) &= (I + tA + t^2/2A^2)(I + tB + t^2/2B^2)\\ &= I + t(A+B) + t^2/2(A^2 + B^2 + 2\,AB) + o(t^2)\\ &= I + t(A+B) + t^2/2\left((A+B)^2 + AB - BA\right) + o(t^2)\end{aligned}$$

Es el desarrollo de $\exp(t(A+B) + t^2/2(AB-BA) + o(t^2))$. Por tanto,

$$C(t) = t(A+B) + t^2/2(AB-BA) + o(t^2)$$

La curva parametrizada $C(t)$, t pequeño, está contenida en el espacio tangente. Por tanto, los coeficientes de su desarrollo de Taylor pertenecen también a este espacio. Es el caso en particular del coeficiente $AB - BA$ de orden 2.

Hemos obtenido: si A y B están en el espacio tangente en la identidad, $AB - BA$ lo es también. La operación $(A, B) \to AB - BA$ es un producto definido sobre el espacio tangente, se llama *corchete de Lie* y se nota usualmente $[A, B]$. El espacio tangente T, equipado del producto "corchete de Lie", es el *álgebra de Lie del grupo G*.

Si continuamos identificando los coeficientes de $C(t)$ en

$$\exp(tA)\exp(tB) = \exp(C(t))$$

obtenemos (Formula de Baker–Campbell–Hausdorff)

$$C(t) = t(A+B) + \frac{t^2}{2}[A,B] + \frac{t^3}{12}([A,[A,B]] + [B,[B,A]]) - \frac{t^4}{24}[B,[A,[A,B]]] + \ldots$$

donde vemos que los otros coeficientes se expresan todos en termino de corchetes de Lie.

Por tanto el álgebra de Lie determina el producto de los elementos de G que están cerca de la identidad.

Es un teorema que si el grupo de Lie G es conexo (= de un solo trozo, como $SO(n)$ pero al contrario de $O(n)$ por ejemplo), cualquier elemento es producto de elementos cerca de la identidad. Entonces toda les estructura de grupo está así determinada por la del álgebra de Lie.

Se puede demostrar que el corchete de Lie $[A, B] = AB - BA$ cumple la "identidad de Jacobi":

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[Y,X]] = 0 \qquad (2)$$

para todos X, Y, Z en el álgebra de Lie.

Ejercicio 8. Demostrar que la identidad de Jacobi es una consecuencia de la propiedad asociativa del producto del grupo G, desarrollando en serie ambos lados de

$$(\exp(X)\exp(Y))\exp(Z) = \exp(X)(\exp(Y)\exp(Z))$$

Grupos de Lie abstractos

No todos los grupos de Lie son grupos de matrices o isomorfos a grupos de matrices. Las construcciones anteriores se generalizan al contexto abstracto: dado un grupo de Lie G con espacio tangente T en la identidad, se construye una aplicación "exponencial" que establece un difeomorfismo entre un entorno de la identidad en G y un entorno de 0 en T; se construye un producto "corchete de Lie" sobre T que le da una estructura de álgebra de Lie; todo sin recurrir a las herramientas disponibles solamente para matrices.

Álgebras de Lie abstractas

Definición 5. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial V con un producto (bilineal) $(x,y) \mapsto [x,y]$ que cumple las dos propiedades:

- Antisimétria: $[x,y] = -[y,x]$ para todos x, y en V.
- Identidad de Jacobi ((2)):

  $$[x,[y,z]] + [y,[x,z]] + [z,[y,x]] = 0$$

  para todos x, y, z en V.

El producto de un álgebra de Lie se llama "corchete de Lie".

Si L y L' son dos álgebras de Lie, entonces un *morfismo de álgebras de Lie* de L en L' es una aplicación lineal f que cumple:

$$f([x,y]) = [f(x), f(y)] \qquad \text{para todos } x, y \text{ en } L.$$

Un álgebra de Lie es *real* o *compleja* según que el espacio vectorial considerado es real o complejo.

Ejemplo 9. El espacio $\mathbb{R}^3$ equipado con el producto vectorial $\wedge$ es un álgebra de Lie.

Ejemplo 10. El espacio de las matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es un álgebra de Lie con el conmutador como el corchete de Lie:

$$[A,B] = AB - BA.$$

Notamos esta álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ (Los espacios vectoriales $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ son iguales; pero sus productos son diferentes: producto usual de matrices para $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, conmutador para $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$).

Más generalmente, cualquier espacio vectorial equipado con un producto $*$ con la propiedad asociativa, es un álgebra de Lie para el corchete de Lie:

$$[x,y] := x * y - y * x$$

Es un teorema (teorema de Ado) que cualquier álgebra de Lie de dimensión finita, real o compleja, puede ser realizado como un subespacio de un espacio de matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, con el corchete de Lie $AB - BA$.

Grupo de Lie	Álgebra de Lie
$GL(n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
$SL(n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ (matrices de traza 0)
$SO(n)$, $O(n)$	$\mathfrak{so}(n)$ (matrices antisimétricas)
$U(n)$	$\mathfrak{u}(n)$ (matrices antihermíticas)
$SU(n)$	$\mathfrak{su}(n)$ (matrices antihermíticas de traza 0)
Matrices diagonales regulares	matrices diagonales
Matrices triangulares superiores con diagonal de 1	matrices triangulares superiores estrictas (diagonal de 0)
Matrices triangulares superiores regulares	matrices triangulares superiores

Cuadro 1: Álgebras de Lie de los principales grupos de Lie de matrices. El corchete de Lie es el conmutador: $[A, B] = AB - BA$.

Las álgebras de Lie de $SU(2)$ y $SO(3)$

Ejemplo 11 (El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ de $SO(3)$.)**.** El álgebra de Lie de $SO(3)$ es el espacio de las matrices reales antisimétricas de orden 3. Admite como base las tres matrices:

$$E_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por un calculo directo determinamos que:

$$[E_x, E_y] = E_z, [E_y, E_z] = E_x, [E_z, E_x] = E_y.$$

Esto determina la estructura de álgebra de Lie de $\mathfrak{so}(3)$. Observamos que el álgebra de Lie obtenida es isomorfa a $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ ($\mathbb{R}^3$ equipado del producto vectorial). El isomorfismo asocia a $\omega \in \mathbb{R}^3$ el endomorfismo $u \mapsto \omega \wedge u$.

Ejemplo 12 (El álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ de $SU(2)$.)**.** El álgebra de Lie de $SU(2)$ es el espacio de las matrices antihermíticas de traza 0, con base (como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$) las tres matrices $i\sigma_x$, $i\sigma_y$, $i\sigma_z$ (las matrices de Pauli multiplicadas por i). Se identifica (con el isomorfismo de espacios vectoriales reales $M \mapsto iM$ entre matrices hermíticas y matrices antihermíticas) con el espacio de las matrices hermíticas de orden 2, con base las matrices de Pauli.

Un calculo directo da las relaciones siguientes de conmutación para las marices de Pauli:

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y.$$

Por lo cuál utilizando como generadores infinitesimales las matrices $\frac{1}{2i}\sigma_x$, $\frac{1}{2i}\sigma_y$, $\frac{1}{2i}\sigma_z$ (en vez de $i\sigma_x$, $i\sigma_y$ e $i\sigma_z$) obtenemos:

$$[\frac{1}{2i}\sigma_x, \frac{1}{2i}\sigma_y] = \frac{1}{2i}\sigma_z, \quad [\frac{1}{2i}\sigma_y, \frac{1}{2i}\sigma_z] = \frac{1}{2i}\sigma_x, \quad [\frac{1}{2i}\sigma_z, \frac{1}{2i}\sigma_x] = \frac{1}{2i}\sigma_y.$$

Como consecuencia. las álgebras de Lie $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{so}(3)$ son isomorfas; un isomorfismo es la aplicación lineal que cumple

$$\frac{1}{2i}\sigma_p = E_p \text{ para } p = x, y, z.$$