

Une traduction de *Das Zerfallen der Curven in gerade
Linien* (Au sujet des courbes qui se décomposent en lignes
droites) de Paul Gordan

Andreas Bernig*, Emmanuel Briand† et Andreas Seidl‡

25 novembre 2005

Résumé

Ceci est une traduction de l'allemand au français de l'article *Das Zerfallen der Curven in gerade Linien* (Au sujet des courbes qui se décomposent en lignes droites) de 1894 de Paul Gordan [6]. Elle est suivie de quelques notes sur la traduction, sur les notations mathématiques et sur les références modernes à cet article. La disposition originale (sauts de pages, numéros de pages, disposition des formules mathématiques) a été respectée, ce qui permet une comparaison aisée avec le texte de référence.

*Département de Mathématiques, Université de Fribourg, SUISSE

†Departamento Matemáticas, estadística y computación, Universidad de Cantabria, Santander, ESPAGNE.

‡Fakultät für Mathematik und Informatik, Universität Passau, ALLEMAGNE.

Au sujet des courbes qui se décomposent en lignes droites.

Par

P. GORDAN à Erlangen.

Monsieur Brill a déterminé dans Göttingen Nachrichten (déc. 1893) les transvectants binaires à partir desquels on peut construire, au moyen de la procédure de Clebsch, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme ternaire, quaternaire, *etc.*, se décompose en facteurs linéaires.

Pour une forme ternaire, cette condition consiste en l'annulation d'un transvectant $(apu)^n$ ^{*}, que j'appellerai par conséquent la formule de Brill. Le but de la présente étude est de montrer que $(apu)^n$ admet comme facteur u_x^2 et d'effectuer la division.

L'annulation du quotient

$$\frac{(apu)^n}{u_x^2}$$

est alors la condition la plus simple pour qu'une courbe se décompose en lignes droites.

§ 1.

Les intersections d'une ligne droite avec une courbe.

La solution du problème du calcul des coordonnées des intersections de la ligne droite

$$v_x = 0$$

avec la courbe

$$f = a_x^n = b_x^n$$

est bien connue. La raison pour laquelle je la reproduis encore ici est que les relations qui apparaissent avec sont utilisées dans la suite.

^{*}) Pour une forme quaternaire ce serait $(apuv)^n$.

On fixe sur v_x deux points arbitraires x et y et on forme la série de points

$$\lambda x - y;$$

sur laquelle se trouvent les intersections cherchées, dont je désigne les paramètres par

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n,$$

ce sont les racines de l'équation

$$(1) \quad (\lambda a_x - a_y)^n = f \cdot \{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n\} = 0.$$

Après détermination de ces paramètres λ_x par résolution de cette équation, on trouve les équations des intersections par la formule :

$$(2) \quad \lambda_x u_x - u_y = 0.$$

Puisque λ_x est une racine de l'équation (1), on a l'identité :

$$(\lambda_x a_x - a_y)^n = 0.$$

En y éliminant λ_x au moyen de la formule (2), il vient la formule :

$$(a_x u_y - u_x a_y)^n = (a u v)^n = 0,$$

qui représente le produit des intersections.

Si $(a u v)^n$ s'annule pour tous les valeurs de u , chaque point de v est une intersection ; dans ce cas, la ligne droite v forme une composante de la courbe f .

Si l'on compare les coefficients des puissances de λ_x^n dans les deux membres de la formule (1), on obtient la formule :

$$(3) \quad (-1)^x \binom{n}{x} f_{y^x} = f a_x.$$

Ces coefficients a_x , qui sont la fonctions symétriques élémentaires des racines λ_x , peuvent s'écrire ainsi :

$$(4) \quad (-1)^x a_x = \sum \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_x.$$

§ 2.

Les intersections d'une ligne droite avec un courbe qui dégénère en lignes droites.

Les résultats du paragraphe précédent prennent une forme légèrement différente, si nous supposons que la courbe f se décompose en n lignes droites

$$\alpha_{1,x} \alpha_{2,x} \dots \alpha_{n,x}.$$

Dans ce cas, on a les identités :

$$f = \alpha_{1,x} \alpha_{2,x} \dots \alpha_{n,x};$$

$$(a \alpha_x u)^n = 0.$$

Les intersections de la ligne v avec f sont sur ces lignes droites, et nous pouvons ordonner les racines λ_{\varkappa} de sorte que le point

$$(2) \quad \lambda_{\varkappa} u_x - u_y = 0$$

se trouve sur la ligne α_{\varkappa} .

On a alors l'identité :

$$\lambda_{\varkappa} \alpha_{\varkappa,x} - \alpha_{\varkappa,y} = 0,$$

d'où il découle pour λ_{\varkappa} que :

$$\lambda_{\varkappa} = \frac{\alpha_{\varkappa,y}}{\alpha_{\varkappa,x}}.$$

Si l'on reporte ceci dans la formule (4), celle-ci devient :

$$(4a) \quad (-1)^{\varkappa} a_{\varkappa} = \sum \frac{\alpha_{1,y}}{\alpha_{1,x}} \frac{\alpha_{2,y}}{\alpha_{2,x}} \dots \frac{\alpha_{\varkappa,y}}{\alpha_{\varkappa,x}}.$$

§ 3.

La formule de Brill.

La somme de puissances des racines λ_{\varkappa} :

$$s_{\nu} = \lambda_1^{\nu} + \lambda_2^{\nu} \dots \lambda_n^{\nu}$$

se représente en fonction des coefficients a_{\varkappa} au moyen des formules de Newton. Leur développement en produit de puissances commence par les termes :

$$(5) \quad s_n = (-1)^n a_1^n + (-1)^{n-1} a_1^{n-2} a_2 \dots$$

On reporte dans cette formule l'expression de a_{\varkappa} obtenue par la formule (3) :

$$f a_{\varkappa} = (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} f_{y^{\varkappa}}$$

et l'on obtient alors pour s_n une fraction dont le numérateur est une fonction polynomiale de f et de ses polarisés $f_{y^{\nu}}$, et dont le dénominateur est f^n .

De là il s'ensuit que le produit :

$$(6) \quad \begin{aligned} f^n s_n &= np \\ &= f^n \cdot \left(\frac{\alpha_{1,y}^n}{\alpha_{1,x}^n} + \frac{\alpha_{2,y}^n}{\alpha_{2,x}^n} \dots \frac{\alpha_{\varkappa,y}^n}{\alpha_{\varkappa,x}^n} \right) \end{aligned}$$

est une fonction polynomiale de f et de ses polaires. Le développement de cette fonction polynomiale en produits de puissances des polaires commence par :

$$(7) \quad p = n^{n-1} f_y^n - n^{n-1} f f_y^{n-2} f_y^2 \dots$$

et les autres termes admettent le facteur f^2 . La forme p est de degré n en les variables y ; je l'écris symboliquement :

$$p = p_y^n.$$

En dérivant suivant y et en incrémentant suivant x , il vient :

$$f^n s_{xz} = n p_y^x p_x^{n-x}.$$

De la formule (6) résulte directement :

$$(8) \quad (apu)^n = 0.$$

Cette formule est due à Brill, et c'est une condition nécessaire pour que la courbe f se décompose en lignes droites. On peut montrer aussi qu'elle est suffisante. En effet, si l'on prend un point x arbitraire sur f et que l'on mène la tangente f_y à la courbe passant par ce point, la formule :

$$(afu)^n$$

donne le produit des intersections de la tangente f_y avec la courbe f . Maintenant si la formule (8) est vérifiée, alors $(afu)^n$ s'annule pour toutes les valeurs de u . De là il s'ensuit alors que f_y forme une composante de la courbe. Puisque dans ce cas toutes les tangentes sont des composantes de la courbe, c'est que celle-ci se décompose en lignes droites.

§ 4.

Le Facteur u_x^2 .

Le transvectant $(apu)^n$ ne fournit pas la forme la plus simple dont l'annulation correspond à la décomposabilité de f en lignes droites. Le but de cette étude est de montrer que $(apu)^n$ est divisible par u_x^2 et d'effectuer la division. Je divise mon travail en 4 étapes :

1) J'indique les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme

$$\varrho = u_\varrho^n$$

admette la puissance u_x^m comme facteur.

2) Comme dit plus haut, on peut représenter s_n comme fonction polynomiale des coefficients a_{xz} au moyen des formules de Newton. Des propriétés de ces fonctions polynomiales sont alors dérivées, dont il résulte que $(apu)^n$ possède le facteur u_x^2 .

3) La forme

$$(afu)^n,$$

dont le développement a les mêmes premiers termes que $(apu)^n$ d'après la formule (7), est mise sous forme normale, c.-à-d. sous forme :

$$(afu)^n = Au_x^n + Bf,$$

où B est une somme de produits symboliques, composés seulement des facteurs symboliques :

$$f, (abu), (afu), b_x.$$

4) $(apu)^n$ est divisé par u_x^2 .

§ 5.

Condition pour que ϱ admette le facteur u_x^2 .

Nous voulons nous occuper dans ce paragraphe des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme :

$$(9) \quad \varrho = u_\varrho^n$$

admette comme facteur une puissance de u_x , par exemple u_x^m , en commençant avec le cas :

$$m = 1.$$

Nous affirmons que :

$$(10) \quad (\varrho xy)^n = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que ϱ possède le facteur u_x .

Preuve : Si ϱ a comme facteur u_x , on trouve par division une forme :

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-1}$$

telle que l'identité suivante soit vérifiée :

$$u_\varrho^n = u_x u_\vartheta^{n-1}.$$

Si on y remplace u par \widehat{xy} , on obtient la formule (10).

Inversement, si cette formule est vérifiée, on remplace y par \widehat{uv} et l'on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= (\varrho x \widehat{uv})^n = (u_\varrho v_x - v_\varrho u_x)^n \\ &= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} (u_\varrho v_x)^{n-\varkappa} (v_\varrho u_x)^\varkappa, \end{aligned}$$

ainsi

$$\varrho v_x^n = -u_x v_\varrho \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} (u_\varrho v_x)^{n-\varkappa} (v_\varrho u_x)^{\varkappa-1},$$

ce grâce à quoi notre affirmation est prouvée.

Je passe désormais au cas

$$m = 2$$

et affirme que la formule :

$$(10a) \quad v_\varrho (\varrho xy)^{n-1}$$

livre la condition nécessaire et suffisante pour que ϱ possède le facteur u_x^2 .

Preuve : Si ϱ a comme facteur u_x^2 , on trouve par division une forme :

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-2}$$

telle que soit satisfaite l'identité suivante :

$$u_{\varrho}^n = u_x^2 u_{\vartheta}^{n-2}$$

Je dérive suivant u et incrémente suivant v ; il vient alors

$$nu_{\varrho}^{n-1}v_{\varrho} = 2u_x v_x u_{\vartheta}^{n-2} + (n-2)u_x^2 u_{\vartheta}^{n-3} v_{\vartheta}.$$

Si l'on remplace ici u par \widehat{xy} , on obtient la formule (10a).

Inversement si la formule (10a) est vérifiée, on remplace d'abord v par \widehat{xy} , ce grâce à quoi on obtient la formule (10), on voit donc pour l'instant que la forme ϱ possède le facteur u_x , et ainsi qu'il y a une forme :

$$\vartheta = u_{\vartheta}^{n-2}$$

telle que soit satisfaite l'identité suivante :

$$u_{\varrho}^n = u_x^2 u_{\vartheta}^{n-2}.$$

On dérive suivant u et on incrémente suivant v , ce qui donne :

$$nu_{\varrho}^{n-1}v_{\varrho} = v_x u_{\vartheta}^{n-1} + (n-1)u_x v_{\vartheta} u_{\vartheta}^{n-2}$$

et, si l'on remplace u par \widehat{xy} , d'après la formule (10a) :

$$0 = v_x (\vartheta xy)^{n-1}.$$

Cette formule montre que la forme ϑ possède le facteur u_x , et donc ϱ possède le facteur u_x^2 .

On peut continuer et passer de cette manière aux cas

$$m = 3, 4, 5, \dots$$

en procédant par récurrence.

En général, on trouve comme condition nécessaire et suffisante, pour que ϱ admette comme facteur u_x^m , la formule :

$$(11) \quad u_{\varrho}^{m-1} (\varrho xy)^{n-m+1} = 0.$$

Preuve : Si la forme ϱ a comme facteur u_x^m , il y a une forme :

$$\vartheta = u_{\vartheta}^{n-m}$$

telle que soit satisfaite l'identité suivante :

$$u_{\varrho}^n = u_x^m u_{\vartheta}^{n-m}.$$

On dérive suivant u et on incrémente suivant \widehat{xy} , on trouve alors la série de formules :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1} u^{n-1}(\varrho xy) &= \binom{n-m}{1} u_x^m u_\vartheta^{n-m-1}(\vartheta xy), \\
\binom{n}{2} u_\varrho^{n-2}(\varrho xy)^2 &= \binom{n-m}{2} u_x^m u_\vartheta^{n-m-2}(\vartheta xy)^2, \\
\binom{n}{3} u_\varrho^{n-3}(\varrho xy)^3 &= \binom{n-m}{3} u_x^m u_\vartheta^{n-m-3}(\vartheta xy)^3, \\
&\dots\dots\dots \\
\binom{n}{n-m} u_\varrho^m(\varrho xy)^{n-m} &= \binom{n-m}{n-m} u_x^m u_\vartheta(\vartheta xy)^{n-m}, \\
\binom{n}{n-m+1} u_\varrho^{m-1}(\varrho xy)^{n-m+1} &= 0,
\end{aligned}$$

d'où la formule (11).

Inversement si cette formule est vérifiée, on peut d'abord en déduire que ϱ possède au moins le facteur u_x^{m-1} . Il y a donc une forme :

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-m+1}$$

de sorte que l'identité suivante soit satisfaite :

$$u_\varrho^n = u_x^{m-1} u_\vartheta^{n-m+1}.$$

On dérive suivant u et on incrémente suivant \widehat{xy} , on trouve la série de formules :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1} u^{n-1}(\varrho xy) &= \binom{n-m+1}{1} u_x^{m-1} u_\vartheta^{n-m}(\vartheta xy), \\
\binom{n}{2} u_\varrho^{n-2}(\varrho xy)^2 &= \binom{n-m+1}{2} u_x^{m-1} u_\vartheta^{n-m-1}(\vartheta xy)^2, \\
&\dots\dots\dots \\
\binom{n}{n-m} u_\varrho^m(\varrho xy)^{n-m} &= \binom{n-m+1}{n-m} u_x^{m-1} u_\vartheta(\vartheta xy)^{n-m}, \\
\binom{n}{n-m+1} u_\varrho^{m-1}(\varrho xy)^{n-m+1} &= \binom{n-m+1}{n-m+1} u_x^{m-1}(\vartheta xy)^{n-m+1},
\end{aligned}$$

d'où la formule (11) :

$$(\vartheta xy)^{n-m+1} = 0.$$

De là, il s'ensuit que ϑ possède la facteur u_x , et donc ϱ possède le facteur u_x^m .

La formule (11) se remplace, avantageusement dans certains cas, par ces 3 conditions plus simples :

$$(12a) \quad u_\varrho^{m-2}(\varrho xy)^{n-m+2} = 0,$$

$$(12b) \quad u_\varrho^{m-2}(\varrho xy)^{n-m+1}(\varrho yz) = 0,$$

$$(12c) \quad u_\varrho^{m-2}(\varrho xy)^{n-m+1}(\varrho zx) = 0,$$

qui sont obtenues à partir de l'identité :

$$u_z(\varrho xy) + u_x(\varrho yz) + u_y(\varrho zx) = u_\varrho(xyz)$$

En particulier, on a établi comme conditions nécessaires et suffisantes, pour que la forme ϱ admette le facteur u_x^2 , les 3 suivantes :

$$(13a) \quad (\varrho xy)^n = 0,$$

$$(13b) \quad (\varrho xy)^{n-1}(\varrho yz) = 0,$$

$$(13c) \quad (\varrho xy)^{n-1}(\varrho zx) = 0.$$

§ 6.

Propriétés de s_n comme fonction polynomiale des a .

Il s'agit donc de vérifier les formules (13) pour le transvectant

$$(apu)^n.$$

Ceci se fait au moyen des formules de Newton :

$$(14) \quad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} a_{n-\varkappa} s_\varkappa = 0,$$

qui nous permettent de représenter les sommes de puissances des racines d'une équation :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$$

comme fonctions polynomiales des coefficients a_\varkappa . Je veux les utiliser pour dériver quelques propriétés de ces fonctions polynomiales.

Premièrement elles montrent que les produits de puissances des coefficients qui forment les termes du développement de s_n possèdent le même poids n . De là vient immédiatement la relation :

$$(15) \quad n s_n = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varkappa a_\varkappa \frac{\partial s_n}{\partial a_\varkappa}.$$

Une autre propriété moins simple, qui porte sur les dérivées partielles

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_\varkappa}$$

va en être déduite. Pour cela, j'introduis une série de grandeurs

$$g_0 g_1 g_2 \cdots$$

avec

$$g_0 = -1$$

418

et les autres grandeurs peuvent s'en déduire par les formules de récurrence :

$$(16) \quad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} a_{n-\varkappa} g_{\varkappa} = 0.$$

J'affirme maintenant qu'on a la formule :

$$(17) \quad \frac{\partial s_n}{\partial a_{n-\mu}} = n g_{\mu}.$$

Preuve. La formule :

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_n} = -n$$

montre que notre affirmation est valide pour $\mu = 0$. Pour faire la preuve pour les autres valeurs

$$\mu = 1, 2, 3, \dots$$

je fais l'hypothèse qu'elle est déjà établie pour toutes les valeurs plus petites que μ , et qu'ainsi pour $\varkappa > 0$ on a :

$$(17a) \quad \frac{\partial s_{n-\varkappa}}{\partial a_{n-\mu}} = (n - \varkappa) g_{\mu-\varkappa}$$

Suivant cette hypothèse, la formule résulte de la formule (15) :

$$(15a) \quad s_{\mu} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} \varkappa a_{\varkappa} g_{\mu-\varkappa}.$$

Je dérive maintenant les formules de Newton :

$$(14) \quad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} a_{\varkappa} s_{n-\varkappa}$$

suivant $a_{n-\mu}$; cette grandeur apparaît d'abord dans un terme comme coefficient, et ensuite dans les $s_{n-\varkappa}$ pour lesquels $\varkappa \leq \mu$. Ainsi, vient la formule :

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\mu} a_{\varkappa} \frac{\partial s_{n-\varkappa}}{\partial a_{n-\mu}} + s_{\mu} = 0,$$

ou, si l'on remplace :

$$\frac{\partial s_{n-\varkappa}}{\partial a_{n-\mu}} \text{ et } s_{\mu}$$

par les valeurs obtenues des formules (17a) et (15a) :

$$\frac{\partial s_n}{\partial s_{n-\mu}} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} (n - \varkappa) g_{\mu-\varkappa} a_{\varkappa} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} \varkappa a_{\varkappa} g_{\mu-\varkappa} = 0$$

ou :

$$\frac{\partial s_n}{\partial s_{n-\mu}} + n \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} g_{\mu-\varkappa} a_{\varkappa} = 0.$$

On utilise la formule de récurrence :

$$(16) \quad n \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\mu} g_{\mu-\varkappa} a_{\varkappa} = 0,$$

alors on arrive à la formule annoncée :

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_{n-\mu}} = n g_{\mu}.$$

Cette formule doit maintenant être utilisée pour mettre les différentielles

$$ds_{\varkappa} \text{ et } da_{\varkappa}$$

en relation les unes avec les autres.

Pour cela je pars de la somme double :

$$W = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varkappa a_{\varkappa} g_{n-\varkappa-\lambda+1} da_{\lambda}$$

et je l'écris de deux manières différentes.

Pour la première écriture, je rassemble tous les termes qui ont le même λ , et pour l'autre je fais la même chose avec les termes qui ont le même \varkappa . Par suite des formules :

$$(15a) \quad s_{n-\lambda+1} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varkappa a_{\varkappa} g_{n-\varkappa-\lambda+1},$$

$$(17) \quad ds_{n-\varkappa+1} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial s_{n-\varkappa+1}}{\partial a_{\lambda}} da_{\lambda} = (n - \varkappa + 1) \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} g_{n-\varkappa-\lambda+1} da_{\lambda},$$

j'obtiens les deux valeurs suivantes pour W :

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} s_{n-\varkappa+1} da_{\varkappa}$$

et

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \frac{\varkappa}{n - \varkappa + 1} a_{\varkappa} ds_{n-\varkappa+1},$$

dont l'égalité fournit la formule :

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \left(\frac{\varkappa}{n - \varkappa + 1} a_{\varkappa} ds_{n-\varkappa+1} - s_{n-\varkappa+1} da_{\varkappa} \right) = 0,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$(18) \quad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n-1} \left(\frac{\varkappa+1}{n - \varkappa} a_{\varkappa+1} ds_{n-\varkappa} - s_{n-\varkappa} da_{\varkappa+1} \right) = 0.$$

Les coefficients a_{\varkappa} et les sommes de puissances s_{\varkappa} sont liés aux polaires de f par les formules :

$$fa_{\varkappa} = (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} a_y^{\varkappa} a_x^{n-\varkappa},$$

$$f^n s_{n-\varkappa} = n p_y^{n-\varkappa} p_x^{\varkappa}.$$

Si l'on désigne le point obtenu par différentiation du point y , par z , en posant :

$$dy = z$$

on obtient alors par différentiation de ces formules :

$$f da_{\varkappa} = (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} \varkappa a_y^{\varkappa-1} a_z a_x^{n-\varkappa},$$

$$f^n ds_{n-\varkappa} = n(n-\varkappa) p_y^{n-\varkappa-1} p_z p_x^{\varkappa}.$$

Je reporte ces valeurs de

$$a_{\varkappa}, s_{n-\varkappa}, da_{\varkappa}, ds_{n-\varkappa}$$

dans les formules :

$$(14) \quad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} a_{n-\varkappa} s_{\varkappa} = 0,$$

$$(18) \quad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n-1} \left(\frac{\varkappa+1}{n-\varkappa} a_{\varkappa+1} ds_{n-\varkappa} - s_{n-\varkappa} da_{\varkappa+1} \right) = 0$$

et j'arrive ainsi aux formules :

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} a_y^{\varkappa} a_x^{n-\varkappa} p_y^{n-\varkappa} p_x^{\varkappa} = 0,$$

$$0 = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} \left\{ \frac{\varkappa+1}{n-\varkappa} (-1)^{\varkappa+1} \binom{n}{\varkappa+1} a_y^{\varkappa+1} a_x^{n-\varkappa-1} (n-\varkappa) p_y^{n-\varkappa-1} p_z p_x^{\varkappa} \right. \\ \left. - p_y^{n-\varkappa} p_x^{\varkappa} (-1)^{\varkappa+1} \binom{n}{\varkappa+1} (\varkappa+1) a_y^{\varkappa} a_z a_x^{n-\varkappa-1} \right\}$$

$$= (a_y p_z - p_y a_z) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} (-1)^{\varkappa+1} (\varkappa+1) \binom{n}{\varkappa+1} a_y^{\varkappa+1} a_x^{n-1-\varkappa} p_y^{n-1-\varkappa} p_x^{\varkappa}$$

$$= -n(a_y p_z - p_y a_z) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} (-1)^{\varkappa} \binom{n-1}{\varkappa} (a_y p_x)^{\varkappa} (a_x p_y)^{n-1-\varkappa}$$

ou

$$(19a) \quad (a_y p_x - p_y a_x)^n = 0,$$

$$(19b) \quad (a_y p_z - p_y a_z)(a_y p_x - p_y a_x)^{n-1} = 0.$$

La formule (19a) devient, en dérivant suivant y et en incrémentant suivant z :

$$(19c) \quad (a_z p_x - p_z a_x)(a_y p_x - p_y a_x)^{n-1} = 0.$$

Les formules (19) sont, d'après les formules (13), les conditions pour que le transvectant :

$$(apu)^n$$

admette u_x^2 comme facteur.

§ 7.

La forme normale de $(afu)^n$.

Le 1^{er} terme dans le développement de p_y^n suivant les polaires de f est f_y^n , et par conséquent le 1^{er} terme dans le développement de $(apu)^n$ est le transvectant $(afu)^n$.

La signification géométrique de cette formule est le produit des points suivant lesquels la polaire f_y au point x coupe la courbe f . Dans le cas spécial où le point x se trouve sur la courbe f même, f_y devient la tangente et deux des intersections tombent au point x .

Si $f = 0$ est ainsi, $(afu)^n$ admet le facteur u_x^2 . De là il suit que le transvectant $(afu)^n$ peut se mettre sous la forme :

$$(20a) \quad (afu)^n = Au_x^2 + Bf$$

Cette forme n'est pas unique, car l'expression admet aussi la forme :

$$(20b) \quad (afu)^n(A + Cf)u_x^2 + (B - Cu_x^2)f.$$

Pour obtenir une forme canonique pour $(afu)^n$, on doit ajouter encore une nouvelle condition. Pour cela je choisis ceux des produits symboliques dont le facteur pour f est obtenu en assemblant seulement des facteurs symboliques :

$$f, (abu), (afu), b_x$$

J'appelle cette représentation de $(afu)^n$ la forme normale de $(afu)^n$, et me donne désormais comme tâche de représenter ce transvectant sous forme normale. Ceci se décompose en 2 étapes :

1^{re} étape. $(afu)^n$ doit être mise sous la forme :

$$(afu)^n = Au_x^2 + Bf.$$

2^e étape. Le facteur B doit être mis sous une forme du type :

$$(21) \quad B = Cu_x^2 + D$$

d'où l'on déduit que la forme normale de $(afu)^n$ est :

$$(afu)^n = (A + Cf)u_x^2 + Du_x^2,$$

avec les termes de D des produits symboliques contenant seulement les facteurs :

$$f, (abu), (afu), b_x.$$

La tâche de mettre le transvectant $(afu)^n$ sous la forme

$$(20a) \quad (afu)^n = Au_x^2 + Bf$$

a déjà été résolue (Math. Ann. volume 7, article de Dersch sur les tangentes doubles) dans l'essentiel; je pourrai me contenter ainsi de présenter brièvement la procédure donnée là-bas.

Les calculs sont les suivants :

$$\begin{aligned} (afu)^n &= (abu)(afu)^{n-1}b_x^{n-1} = \frac{1}{2}(abu) \{((afu)b_x)^{n-1} - ((bfu)a_x)^{n-1}\} \\ &= \frac{1}{2}(abu)((afu)b_x - (bfu)a_x) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2} \{(afu)b_x\}^{n-2-\varkappa} \{(bfu)a_x\}^{\varkappa} \\ &= \frac{1}{2}(abu) \{f(abu) - u_x(abf)\} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2} ((afu)b_x)^{n-2-\varkappa} ((bfu)a_x)^{\varkappa}. \end{aligned}$$

De là suit la forme exigée (20a), si d'abord on pose :

$$(23) \quad \frac{1}{2}(abu)^2 \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2} ((afu)b_x)^{n-2-\varkappa} ((bfu)a_x)^{\varkappa}$$

et on montre alors deuxièmement que l'expression :

$$(23) \quad \frac{1}{2}(abu)(abf) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2} ((afu)b_x)^{n-2-\varkappa} ((bfu)a_x)^{\varkappa}$$

admet le facteur u_x , et l'on pose :

$$(24) \quad L = -2Au_x.$$

Pour cela, on forme la somme :

$$K = \sum (abc)^2 (afu)^{\varkappa} (bfu)^{\lambda} (cfu)^{\mu} a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu}$$

étendue sur tous les nombres \varkappa, λ, μ qui satisfont la relation

$$\varkappa + \lambda + \mu = n - 2.$$

À l'aide de l'identité :

$$u_x(abc) = a_x(bcu) + b_x(cau) + c_x(abu),$$

le produit

$$u_x K$$

devient la somme de 3 sommes obtenues les unes des autres par l'échange des symboles a, b, c . Puisque ces symboles représentent la même forme f , ces 3 sommes ont une la même valeur, qui est :

$$Ku_x = 3(abc)(abu) \sum (afu)^{\varkappa} (bfu)^{\lambda} (cfu)^{\mu} a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu}.$$

Dans cette somme, les termes correspondant à $\mu = 0$ valent ensemble $3L$, de sorte que, si dans les autres termes on pose :

$$\mu = \nu + 1$$

la formule devient :

$$\begin{aligned} & Ku_x - 3L \\ &= 3(abc)(abu)(cfu) \sum (afu)^\varkappa (bfu)^\lambda (cfu)^\nu a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\nu}, \end{aligned}$$

dans laquelle la somme porte sur les nombres \varkappa, λ, ν pour lesquels :

$$\varkappa + \lambda + \nu = n - 3$$

On y échange les symboles a, b, c les uns avec les autres, on obtient ainsi 3 sommes, qui ont la même valeur.

Nous voulons en faire la somme, de sorte qu'il vienne :

$$\begin{aligned} & Ku_x - 3L \\ &= (abc) \left\{ \begin{aligned} & ((abu)(cfu) + (bcu)(afu) + (cau)(bfu)) \\ & \cdot \sum (afu)^\varkappa (bfu)^\lambda (cfu)^\nu a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\nu} \end{aligned} \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a

$$L = \frac{1}{3} Ku_x,$$

et donc d'après la formule (24) :

$$\begin{aligned} (25) \quad & A = -\frac{1}{6} K \\ &= -\frac{1}{6} \sum (abc)^2 (afu)^\varkappa (bfu)^\lambda (cfu)^\mu a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu}. \end{aligned}$$

Je m'attaque maintenant à la 2^e tâche, celle de mettre la forme :

$$B = \frac{1}{2} (abu)^2 \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2} ((afu)b_x)^{n-2-\varkappa} ((bfu)a_x)^\varkappa$$

sous une forme :

$$(21) \quad B = Cu_x^2 + D$$

telle que les produits symboliques composant D contiennent seulement les facteurs :

$$f, (abu), (afu), b_x$$

Pour mener à bien cette tâche, je pars des identités :

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= (y + (x - y))^n + (x - (x - y))^n, \\ n(x^{n-1} - y^{n-1}) &= n(y + (x - y))^{n-1} - n(x - (x - y))^{n-1} \end{aligned}$$

et développe les puissances du membre de droite en suivant la formule du binôme. Par ce moyen viennent les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
(26a) \quad & n(x^{n-1} - y^{n-1}) = \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa} (y^{n-\varkappa} + (-1)^\varkappa x^{n-\varkappa}) (x-y)^{\varkappa-1}, \\
& n \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2} x^{n-2-\varkappa} y^\varkappa = \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa} (y^{n-\varkappa} + (-1)^\varkappa x^{n-\varkappa}) (x-y)^{\varkappa-2}, \\
(26b) \quad & 2n(x^{n-1} - y^{n-1}) = n \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n-1}{\varkappa-1} (y^{n-\varkappa} + (-1)^\varkappa x^{n-\varkappa}) (x-y)^{\varkappa-1}, \\
& = \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa} \varkappa (y^{n-\varkappa} + (-1)^\varkappa x^{n-\varkappa}) (x-y)^{\varkappa-1}, \\
& 0 = \sum_{\varkappa=3}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa} (\varkappa-2) (y^{n-\varkappa} + (-1)^\varkappa x^{n-\varkappa}) (x-y)^{\varkappa-3}.
\end{aligned}$$

Dans ces identités, je remplace :

$$x \text{ par } b_x(afu), \quad y \text{ par } a_x(bfu)$$

et

$$x - y \text{ par } f(abu) - u_x(abf)$$

et je multiplie la formule (26a) par $(abu)^2$ et la formule (26b) par $(abu)^2(abf)$. Ainsi, j'arrive aux formules :

$$\begin{aligned}
2nB &= (abu)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa} ((a_x(bfu))^{n-\varkappa} + (-1)^\varkappa (b_x(afu))^{n-\varkappa}) \\
& \quad (f(abu) - u_x(abf))^{\varkappa-2}, \\
0 &= (abu)^2 u_x(abf) \sum_{\varkappa=3}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa} (\varkappa-2) ((a_x(bfu))^{n-\varkappa} + (-1)^\varkappa (b_x(afu))^{n-\varkappa}) \\
& \quad (f(abu) - u_x(abf))^{\varkappa-3}.
\end{aligned}$$

Dans ces dernières, les symboles a et b représentent la même forme f et peuvent donc être échangés; on a donc :

$$\begin{aligned}
nB &= (abu)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} (a_x(bfu))^{n-\varkappa} + (-1)^\varkappa (b_x(afu))^{n-\varkappa} (f(abu) - u_x(abf))^{\varkappa-2}, \\
0 &= (abu)^2 u_x(abf) \sum_{\varkappa=3}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} (\varkappa-2) (b_x(afu))^{n-\varkappa} \\
& \quad (f(abu) - u_x(abf))^{\varkappa-3}.
\end{aligned}$$

Si l'on développe à nouveau en suivant la formule du binôme, les formules suivantes s'ensuivent :

$$\begin{aligned}
nB &= (abu)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} (b_x(afu))^{n-\varkappa} \left\{ f(abu)^{\varkappa-2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa-2} (-1)^{\lambda} \binom{\varkappa-2}{\lambda} (f(abu))^{\varkappa-2-\lambda} (u_x(abf))^{\lambda} \right\}, \\
0 &= (abu)^2 u_x(abf) \sum_{\varkappa=3}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa-2} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} (\varkappa-2) \binom{\varkappa-2}{\lambda-1} (b_x(afu))^{n-\varkappa} \\
&\quad (f(abu))^{\varkappa-2-\lambda} (u_x(abf))^{\lambda-1} \\
&= (abu)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa-2} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda} \lambda (b_x(afu))^{n-\varkappa} (f(abu))^{\varkappa-2-\lambda} \\
&\quad (u_x(abf))^{\lambda}, \\
nB &= (abu)^2 \begin{cases} \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} (b_x(afu))^{n-\varkappa} (f(abu))^{\varkappa-2} \\ -u_x^2(abf)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\varkappa-2} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda} (\lambda-1) \\ (b_x(afu))^{n-\varkappa} (f(abu))^{\varkappa-2-\lambda} (u_x(abf))^{\lambda-2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

On compare cette formule à la formule que nous avons postulée :

$$B = Cu_x^2 + D,$$

ainsi, on conclut :

$$(27a) \quad nC = -(abu)^2 (abf)^2 \sum_{\varkappa=4}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-4} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda+2} (\lambda+1) (b_x(afu))^{n-\varkappa} (f(abu))^{\varkappa-4-\lambda} (u_x(abf))^{\lambda},$$

$$(27b) \quad nD = \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} (b_x(afu))^{n-\varkappa} f^{\varkappa-2} (f(abu))^{\varkappa}.$$

Les formules (25) et (27) donnent les valeurs pour A,C et D qui apparaissent dans la forme normale du transvectant

$$(afu)^n = (A + Cf)u_x^2 + Df,$$

je les y reporte, elle devient :

$$n(afu)^n = \begin{cases} -\frac{n}{6} u_x^2 (abc)^2 \sum (afu)^{\varkappa} (bfu)^{\lambda} (cfu)^{\mu} a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu} \\ -f u_x^2 (abu)^2 (abf)^2 \sum_{\varkappa=4}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-4} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda+2} (\lambda+1) \\ (b_x(afu))^{n-\varkappa} (f(abu))^{\varkappa-4-\lambda} (u_x(abf))^{\lambda} \\ +f \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} (b_x(afu))^{n-\varkappa} f^{\varkappa-2} (f(abu))^{\varkappa}. \end{cases}$$

Nous pouvons la simplifier encore plus, en introduisant la notation :

$$(28) \quad q = q_y^n = n f_y^n - f \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} f^{\varkappa-2} f_y^{n-\varkappa} f_y^\varkappa;$$

elle devient alors :

$$(29) \quad (aqu)^n = u_x^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{n}{6}(abc)^2 \sum (afu)^\varkappa (bfu)^\lambda (cfu)^\mu a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu} \\ -f(abu)^2 (abf)^2 \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-4} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda+2} (\lambda+1) \\ (b_x(afu))^{n-\varkappa} (f(abu))^{\varkappa-4-\lambda} (u_x(abf))^\lambda. \end{array} \right.$$

§ 8.

Division par u_x^2 .

Les premiers termes des développements de p_y^n et de q_y^n suivant les polaires sont :

$$\begin{aligned} n^{n-1} f_y^n - n^{n-1} \frac{n-1}{2} f f_y^{n-2} f_y^2, \\ n f_y^n - \binom{n}{2} f f_y^{n-2} f_y^2, \end{aligned}$$

et les autres admettent le facteur f^2 . De là il s'ensuit que la différence :

$$(30) \quad p_y^n - n^{n-2} q_y^n$$

admet également ce facteur, et que l'on peut donc poser :

$$p_y^n = n^{n-2} q_y^n + f^2 r_y^n.$$

Par une transvection avec f , on obtient la formule :

$$(31) \quad (apu)^n = n^{n-2} (aqu)^n + f^2 (aru)^n;$$

qui montre que $(aru)^n$ admet le facteur u_x^2 , et donc d'après §5, que les formules suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} (a_y r_x - r_y a_x)^n &= 0, \\ (a_y r_x - r_y a_x)^{n-1} (aru) &= 0. \end{aligned}$$

De celles-ci peuvent être dérivées les suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= ((abu)r_x - (rbu)a_x)^n = ((abr)u_x + b_x(aru))^n, \\ 0 &= ((abu)r_x - (rbu)a_x)^{n-1} (abr)u_x = ((abr)u_x + b_x(aru))^{n-1} (abr)u_x, \\ 0 &= b_x^n (aru)^n + n (b_x(aru))^{n-1} u_x (abr) \\ &\quad + u_x^2 (abr)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa} (b_x(aru))^{n-\varkappa} (u_x(abr))^{\varkappa-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= n (b_x(aru))^{n-1} u_x(abr) \\
&\quad + u_x^2(abr)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} n \binom{n-1}{\varkappa-1} (b_x(aru))^{n-\varkappa} (u_x(abr))^{\varkappa-2}, \\
f(aru)^n &= u_x^2(abr)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa} (\varkappa-1) (b_x(aru))^{n-\varkappa} (u_x(abr))^{\varkappa-2}.
\end{aligned}$$

Si l'on reporte les valeurs de $(aqu)^n$ et $(aru)^n$ dans la formule (31), on arrive à une formule finale :

$$(apu)^n = u_x^2 \left\{ \begin{aligned} &-\frac{n}{6} \sum (afu)^\varkappa (bfu)^\lambda (cfu)^\mu a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu} \\ &-f(abu)^2 (abf)^2 \sum_{\varkappa=4}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-4} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda+2} (\lambda+1) \\ &\quad (b_x(afu))^{n-\varkappa} (f(abu))^{\varkappa-4-\lambda} (u_x(abf))^\lambda \\ &+f(abr)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa} (\varkappa-1) (b_x(aru))^{n-\varkappa} (u_x(abr))^{\varkappa-2}. \end{aligned} \right.$$

Enfin, je veux encore remarquer qu'il est facile d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes qu'une courbe de l'espace C se décompose en lignes droites. En effet, si l'on relie tous les points de la courbe C à un point ξ arbitraire, les lignes de jonction forment un cône K . Maintenant si C se décompose en lignes droites, alors tous les cônes K se décomposent en plans.

Erlangen, Avril 1894.

1. La copie numérique de l'article original fait partie de la collection *Mathematica* du *Digitalisierungszentrum* de la bibliothèque nationale et universitaire de Göttingen. Elle est en accès libre *via* son site web :
<http://gdz.sub.uni-goettingen.de>
2. Gordan utilise la méthode symbolique pour manipuler les fonctions polynomiales homogènes, *i.e.* celles-ci sont représentées (symboliquement) comme des puissances pures de formes linéaires. Pour une explication moderne, nous renvoyons à [7, 4].
3. La construction de la formule de Brill, telle qu'elle est présentée par Gordan, est reprise dans [5] (ch. 4, §2) et ré-exposée de façon moderne. En particulier, le covariant apolaire est interprété dans la cadre de la théorie de la représentation.
4. Notons que, dans [5], l'article de Gordan est attribué par erreur à Brill, qui a néanmoins bien travaillé sur le même problème ([2] auquel Gordan fait explicitement référence, en appelant "formule de Brill", *Brill'sche Formel*, le covariant qu'il étudie ; voir aussi [3]).
5. Nous avons trouvé le texte de Gordan d'une aide considérable pour le calcul effectif de la formule de Brill. Voir [1].
6. La traduction de *Ueberschiebung* en *transvection* ou *transvectant* est explicite dans les textes du XIX^e siècle. Citons par exemple Salmon [8], § 303 :
« This operation, in German called *Ueberschiebung*, we shall call it transvection, and the covariants generated we shall call transvectants of the given covariants. »
7. Nous avons traduit *ganze Function* par *fonction polynomiale*, comme l'indique le contexte.
8. La démonstration de Gordan ne prend pas en compte, à la fin du § 4, le cas où le point x est sur une composante multiple de f (alors f_y est identiquement nulle).

Références

- [1] Emmanuel Briand. Brill's equations for the subvariety of factorizable forms. In Laureano González-Vega and Tomás Recio, editors, *Actas de los Encuentros de Algebra Computacional y Aplicaciones : EACA 2004*, pages 59–63, 2004. Santander.
- [2] A. Brill. Über symmetrische Functionen von Variabelnpaaren. *Nachrichten von der Königlischen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, 20 :757–762, 1893.
- [3] A. Brill. Über die Zerfällung einer Ternärform in Linearfactoren. *Math. Ann.*, 50, 1897.
- [4] Igor Dolgachev. *Lectures on invariant theory*. 2004.
- [5] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [6] Paul Gordan. Das Zerfallen der Kurven in gerade Lienien. *Math. Ann.*, 45 :410–427, 1894.
- [7] Peter J. Olver. *Classical invariant theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [8] George Salmon. *Lessons introductory to the modern higher algebra*. Hodges, Foster and Co., Dublin, 1876.