N° d'Ordre : 2654

THÈSE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

par

Emmanuel BRIAND

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

Polynômes multisymétriques

Soutenue le 11 octobre 2002 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M.	M. Brion	Rapporteur
M.	B. Mourrain	Rapporteur
M.	J.-Y. Thibon	Rapporteur
Mme	C. Martínez López	Examinatrice
M.	T. Recio Muñiz	Examinateur
M.	F. Ulmer	Examinateur
M.	L. González-Vega	Directeur
Mme.	M.-F. Roy	Directrice

Remerciements

Mes remerciements vont d'abord a mes directeurs de thèse, Marie-Françoise Roy et Laureano González-Vega, dont les conseils, la patience, les encouragements et l'optimisme ont été des ingrédients essentiels de ce travail.

Je veux remercier aussi Bernard Mourrain, Jean-Yves Thibon et Michel Brion d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. La lecture attentive et les remarques de Michel Brion ont beaucoup fait pour l'amélioration de ce mémoire.

Je suis très reconnaissant à Tomás Recio, Consuelo Martínez et Felix Ulmer d'avoir accepté de faire partie du jury.

Merci à toutes les personnes qui se sont intéressé à mon travail. Merci en particulier à Nicolas Thiéry, Éric Rannou et Bodo Lass pour leurs remarques.

Merci aussi au personnel administratif et technique de l'IRMAR, pour sa compétence, sa disponibilité et son amabilité.

Cette thèse a été effectuée en cotutelle avec l'Université de Cantabria, à Santander. J'ai vivement apprécié l'accueil chaleureux du personnel du Colegio Mayor Juan de La Cosa.

Les calculs les plus lourds effectués dans cette thèse ont été rendu possibles grâce au soutien matériel de l'UMS MEDICIS.

Enfin, l'effort individuel qui a produit ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien de nombreuses personnes de mon entourage. Parmi eux, je tiens d'abord à remercier mes parents pour leur confiance et leur présence dans les moments les moins faciles de ces quatre années. Je dois aussi des remerciements tout particuliers et chaleureux à Denis, Héloïse, Mariángeles et Nuria. La présence et les encouragements de chacun d'eux m'ont été vraiment précieux.

Sommaire

Index des notations

B_n^r	algèbre des polynômes à coefficients rationnels en des variables qui se spécialisent en les polynômes multi-symétriques élémentaires	71
Bez	déterminant bezoutien	142
$\mathcal{B}rill_n^{r+1}$	idéal des équations de Brill	105
$\mathcal{B}rill(\mathcal{V})$	idéal de Brill	104
$\mathcal{C}(Q;\delta)$	cône du polynôme Q relativement au sommet δ	138
$\chi(T)$	vecteur caractéristique d'un sous-ensemble T	43
$Chow(n,\mathbb{P}\mathcal{V})$	variété de Chow des multi-ensembles de points	93
$\mathcal{D}(n,\mathcal{V})$	ensemble des éléments décomposables	93
$\mathcal{D}(S)$	diagramme de Newton d'une série	137
$\mathfrak{D}_n^k(A)$	algèbre des polynômes multisymétriques homogènes à coefficients dans A	95
$\mathfrak{D}_n^k(A)_{\mathrm{degh}=N}$	composante homogène de degré N de $\mathfrak{D}_n^k(A)$	96
$\mathfrak{D}_n^k(A)_{\mathrm{mdeg}=\alpha}$	composante homogène de multidegré α de $\mathfrak{D}_n^k(A)$	96
degh	degré pour $\mathfrak{D}_n^j(A)$	96
$\Delta_{[\mathcal{E}\,\mid\,\mathcal{E}']}$	discriminant généralisé	119
$\Delta^r, \Delta_\alpha^r$	opérateur de polarisation	31
$E(\mathbf{t})$	fonction génératrice des polynômes multisymétriques élémentaires	19
$E(t)$	fonction génératrice des polynômes symétriques élémentaires	16
e_α	polynôme multisymétrique élémentaire	19
e_k	polynôme symétrique élémentaire	16
$e_\mathfrak{p}$	produit de polynômes multisymétriques élémentaires	24
$\boldsymbol{e}_\alpha$	fonction multisymétrique élémentaire, dans l'algèbre de MacMahon	27
	variables qui se spécialisent en les polynômes multi-symétriques élémentaires	71
$\eta_1,\ldots,\eta_k$	système d'invariants secondaires	30
$f_\Omega(\alpha;\ell)$	nombre de partitions de α en ℓ parts toutes dans Ω	57
$F_{\Omega,\ell}$	série génératrice des $f_\Omega(\alpha;\ell)$	57
$\mathcal{F}$	ensemble des fonctions de $\{1,\ldots,k\}$ dans l'alphabet $\{a,b,\ldots,z\}$	43
G	groupe fini	28
g_Ω	série génératrice des éléments de Ω	57
$\mathcal{G}(\preceq,\mathcal{D})$	variété de bases de Gröbner	120

HB^r_n	série de Hilbert-Poincaré de B^r_n	77
$H\mathfrak{J}^r_n$	série de Hilbert-Poincaré de $\mathfrak{J}^r_n$	56
h_k	somme complète	16
$\mathfrak{J}^r_n(A)$	algèbre des polynômes multisymétriques à coefficients dans A	18
$\mathfrak{J}^r_n(A)_{\mathrm{mdeg}=\alpha}$	composante de multidegré α de $\mathfrak{J}^r_n(A)$	18
$\mathfrak{J}^r_n(A)_{\lvert\,\mathrm{mdeg}\,\rvert=k}$	composante de degré k de $\mathfrak{J}^r_n(A)$, pour le degré induit par le multidegré	18
Jac_F	déterminant Jacobien de la famille F	140
$\mathbb{K}$	corps	21
κ^i_j	projection entre algèbres de polynômes multi-symétriques associés à des alphabets de tailles $i < j$	26
κ_n	inclusion de l'algèbre des polynômes multisymétriques dans l'algèbre de MacMahon	26
ker	noyau d'une application	43
$\mathbb{L}$	corps algébriquement clos	21
$\mathbb{L}[U]$	algèbre de coordonnées affines d'une variété affine U	98
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$	espace des séries formelles	137
$\ell_{\mathfrak{p}}$	longueur de la partition de vecteur $\mathfrak{p}$	23
ℓ_F	symbole de Kronecker	143
ℓ_λ	longueur de la partition d'entier λ	23
$\lambda, [\lambda_1, \ldots, \lambda_k]$	partition d'entier	15
λ^*	conjuguée de la partition λ	65
$\lambda \vdash k$	λ est une partition de l'entier k	23
m_λ	fonction symétrique monomiale	15
$m_{\mathfrak{p}}$	fonction multisymétrique monomiale	23
$\boldsymbol{m}_{\mathfrak{p}}$	fonction monomiale dans l'algèbre de MacMahon	25
$\mathfrak{M}^r(A)$	algèbre de MacMahon pour des coefficients dans A	24
$\mathfrak{M}^r(A)_{\mathrm{mdeg}=\alpha}$	composante de multidegré α de $\mathfrak{M}^r(A)$	18
$\mathfrak{M}^r(A)_{\lvert\,\mathrm{mdeg}\,\rvert=k}$	composante de degré k de $\mathfrak{M}^r(A)$, pour le degré induit par le multidegré	18
maj	indice majeur d'une permutation	64
mdeg	multidegré des polynômes multisymétriques	18
$\mu_{\mathfrak{p}}(\beta)$	multiplicité du vecteur β dans la partition de vecteur $\mathfrak{p}$	23
$\mu_{\mathfrak{p}}$	multi-ensemble des multiplicités des parts de $\mathfrak{p}$	23
$\boldsymbol{\mu}$	fonction de Möbius	42
$\mu_{\mathfrak{p}}!$	produit des factorielles des multiplicités des parts de $\mathfrak{p}$	23
mult_P	opérateur de multiplication par P	118

$N_F(P)$	forme normale de P relativement à F	141
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels	18
$\mathbb{N}^k(j)$	ensemble des $\beta \in \mathbb{N}^k$ avec $\lvert\beta\rvert = j$	94
$\mathbb{N}^*$	ensemble des entiers naturels non-nuls	15
$P(t)$	fonction génératrice des sommes de puissances	16
p_α	somme de puissances multisymétrique	20
p_k	somme de puissances	16
$p_\mathfrak{p}$	produit de sommes de puissances multisymétriques	24
$\mathbb{P}W$	espace projectif	93
$\mathbb{P}_\omega W$	espace projectif anisotrope	129
$\mathcal{P}(Q)$	polytope de Newton d'un polynôme	137
$\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$	partitions de vecteur typiques	22
$\mathfrak{p} \vdash \gamma$	$\mathfrak{p}$ est une partition du vecteur γ	23
$\mathfrak{p}_\Pi$	partition de vecteur associée à une partition d'ensemble Π	43
$\boldsymbol{p}_\alpha$	somme de puissances multisymétrique, dans l'algèbre de MacMahon	27
Part_k	ensemble des partitions de $\{1, \dots, k\}$	42
$\mathrm{Parth}(n)$	partitions de $\{1, \dots, n^2\}$ en n parts de cardinal n	111
per	permanent	45
φ	application produit formel de vecteurs	93
$\widehat{\varphi}$	morphisme de Chow	93
φ^*	pullback de φ	94
π	déshomogénéisation des variables associées aux polynômes multisymétriques élémentaires	99
$\Pi_1, \dots, \Pi_\ell$	blocs de la partition Π	42
Π, Σ, Θ	Partitions typiques de $\{1, \dots, k\}$	42
q_β	la fonction $\binom{\lvert\beta\rvert}{\beta}\frac{1}{\lvert\beta\rvert}p_\beta$	35
q_k	la fonction p_k/k	34
$q_\mathfrak{p}$	produit de fonctions q_k	24
$\mathcal{R}el_n^r$	idéal des relations à coefficients dans $\mathbb{Q}$ entre les polynômes multisymétriques élémentaires	72
$\mathcal{R}elh_n^{r+1}$	idéal des relations à coefficients dans $\mathbb{Q}$ entre les polynômes multisymétriques élémentaires homogènes	95
$\mathrm{Res}_{\omega_1,\dots,\omega_k}^{(d_1,\dots,d_k)}$	Résultant anisotrope	131
ρ_i^j	projection entre algèbres de polynômes multisymétriques associés à des alphabets de tailles $j > i$	26
ρ_n	projection de l'algèbre de MacMahon sur l'algèbre des polynômes multisymétriques	26

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude des polynômes multisymétriques : les polynômes en les coefficients de la matrice :

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & z_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & z_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_r & b_r & \dots & z_r \end{bmatrix}$$

qui sont inchangés par toutes les permutations des colonnes de cette matrice. C'est une généralisation des polynômes symétriques (cas qui correspond à $r = 1$). Deux aspects différents sont abordés : dans la majeure partie du document (les trois premiers chapitres), les polynômes multisymétriques sont étudiés "pour eux-mêmes" : les coefficients de la matrice $\mathbb{X}$ sont des variables libres. Au contraire, dans le dernier chapitre, on étudie les fonctions multisymétriques des racines de systèmes d'équations polynomiales d'un certain type.

Les premiers traitements systématiques des fonctions multisymétriques apparaissent à la fin du dix-neuvième siècle. Ce sont les travaux de Friedrich Junker [1] [43, 44, 45, 46, 47] et de MacMahon [52]. Tous deux définissent des analogues multisymétriques des fonctions symétriques monomiales, des fonctions symétriques élémentaires et des sommes de puissances. Le point de vue de MacMahon est principalement combinatoire, tandis que Junker est intéressé par le calcul des relations entre les polynômes multisymétriques élémentaires.

Au cours du vingtième siècle les polynômes multisymétriques ne font que des apparitions brèves. Ils sont utilisés par Emmy Noether [58] et Hermann Weyl [85] comme outils de démonstration dans leurs travaux en théorie des invariants.

Ce n'est que récemment (depuis une dizaine d'années) que les polynômes multisymétriques redevienent d'actualité :

[1]Le directeur de thèse de Junker est vraisemblablement Alexander von Brill. Junker lui adresse ses remerciements au début de son mémoire de thèse [42]. La note en bas de la page 79 de [59], à la suite de l'exemple 4.32, qui donne Hilbert comme directeur de thèse de Junker, est probablement erronée.

- en géométrie, parce que l'anneau des polynômes multisymétriques se trouve être l'algèbre de coordonnées affines d'une variété paramétrisant les produits de formes linéaires (article d'Amnon Neeman [57], travaux de John Dalbec [22], et de Gelfand, Kapranov et Zelevinsky [30]). Les relations entre polynômes multisymétriques élémentaires s'interprêtent naturellement comme les équations de cette variété plongée dans un espace affine.
- en combinatoire, Ira Gessel redécouvre les travaux de MacMahon [31] et Mercedes Rosas, dans [65], adapte aux polynômes multisymétriques la présentation de Doubilet des polynômes symétriques [24]) .
- en théorie des invariants des groupes finis (en particulier travaux de Fleischmann [27]).
- Dans l'étude des systèmes d'équations polynomiales avec un nombre fini de solutions (u-résultant, travaux de Tsikh, Aizenberg, Kytmanov, rassemblés dans le livre [12]).
- Et dans d'autre domaines encore, que nous n'avons pas abordé dans ce mémoire (travaux d'Olver et Shabikan dans le domaine des équations aux dérivées partielles, [60], topologie algébrique ([1] et le très récent article [26])).

Le premier chapitre de cette thèse est consacré à des généralités sur les polynômes multisymétriques. Nous rassemblons les connaissances éparses sur le sujet. En particulier nous donnons diverses formules explicites pour exprimer les différentes familles remarquables de polynômes multisymétriques les unes en fonction des autres. Parmi ces formules la "formule de réduction" (proposition 1.9) semble nouvelle, et joue un rôle important dans le chapitre 3. Nous donnons aussi des conditions nécessaires et suffisantes sur l'anneau de coefficients pour que les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent l'algèbre des polynômes multisymétriques. Un tel énoncé n'avait jamais été écrit. En appliquant le théorème de Eagon et Hochster de la théorie des invariants des groupes finis, nous mettons en évidence la structure naturelle d'extension entière d'une algèbre de polynômes pour l'algèbre des polynômes multisymétriques, structure que nous exploiterons fortement dans le chapitre 2. Les polynômes multisymétriques élémentaires donnent en fait un système d'invariants primaires et un système d'invariants secondaires naturels.

L'algèbre des polynômes multisymétriques est multigraduée. Aussi nous donnons diverses formules pour sa série de Hilbert-Poincaré. Ces formules sont aussi des formules d'énumération des partitions de vecteur, dues essentiellement à Andrews d'une part, et Gessel et Garsia d'autre part. Nous en donnons aussi une présentation dans le langage du pléthysme des fonctions symétriques, présentation qui prépare certains calculs du chapitre 3.

Le chapitre 2 est consacré à un nouvel algorithme de calcul de l'idéal de toutes les relations entre polynômes multisymétriques élémentaires sur un corps de caractéristique nulle. Les ingrédients sont ceux préparés au chapitre 1 : l'anneau des polynômes multisymétriques considéré comme anneau d'invariants d'un groupe fini, avec ses systèmes d'invariants primaires et secondaires naturels ; sa série de Hilbert-Poincaré multivariée, et une méthode de Junker [44], précisée par Dalbec [22] qui permet de calculer toutes les relations en multidegré donné (on est ramené à des calculs de formules de conversion entre différentes familles de polynômes multisymétriques). Cet algorithme donne une base de Gröbner réduite (pour un certain ordre) de l'idéal des relations (sans utiliser l'algorithme de Buchberger).

Nous avons réussi à mener l'exécution de cet algorithme à son terme dans le cas où la matrice $\mathbb{X}$ a $n = 4$ colonnes et $r = 2$ lignes, le cas $n = 5, r = 2$ et le cas $n = 3, r = 3$. L'idéal des relations n'avait jamais été calculé dans ces trois cas.

Nous terminons en prévoyant le résultat de l'algorithme pour le cas simple $n = 2$ (r quelconque) et un ordre monomial bien choisi.

Dans le chapitre 3 est adopté le point de vue géométrique. Le lien entre polynômes multisymétriques et sous-variété des formes factorisables est explicité de façon précise. Ce chapitre reprend en fait la présentation par Dalbec [22, 21] des polynômes multisymétriques homogènes, en précisant certains de ses résultats. Nos résultats nouveaux sont les suivants : en utilisant le théorème 1.19 du chapitre 1 qui précisait quand les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent l'algèbre des polynômes multisymétriques, nous montrons que l'application naturelle du produit symétrique d'ordre n de l'espace projectif sur la variété de Chow de n points de l'espace projectif n'est jamis un isomorphisme en caractéristique positive inférieure ou égale à n, complétant des résultats de Neeman [57]. En appliquant aux résultats de l'algorithme présenté au chapitre 2 une marche de Gröbner, nous sommes capables de déterminer l'idéal de toutes les équations polynomiales vérifiées par une forme pour être produit de facteurs linéaires dans deux cas qui n'avaient jamais été calculées : les cubiques en quatre variables et les quartiques ternaires. Dans ces deux cas, nous comparons cet idéal à celui des équations de Brill. Nous démontrons d'une autre façon un résultat déjà présent dans [22] : que ces deux idéaux diffèrent en un nombre infini de composantes graduées pour les cubiques en quatre variables. Mais nous montrons aussi le résultat nouveau que dans le cas des quartiques ternaires, ces idéaux sont différents mais coïncident en grand degré. Pour finir, nous donnons une reformulation combinatoire nouvelle de la conjecture de Foulkes-Howe.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude des polynômes multisymétriques des racines de certains systèmes d'équations polynomiales avec un nombre fini de solutions. Nous considérons les deux cas suivants : systèmes de polynômes qui sont une base de Gröbner pour un ordre fixé et des monômes de tête fixés ; systèmes de polynômes de poids fixé qui définissent une intersection complète stricte. Nous montrons que dans ces deux cas, les polynômes multisymétriques des zéros sont respectivement des fonctions polynomiales des coefficients du système, ou des fractions rationnelles des coefficients du système. Ces résultats sont valables en toute caractéristique. Pour finir, nous donnons une présentation algébrique des résultats essentiellement dus à Tsikh, Aizenberg et Kytmanov sur les relations entre sommes de puissances multisymétriques des racines et coefficients des systèmes de Pham généralisés.

Introducción

Cette thèse est une thèse en cotutelle franco-espagnole. Aussi nous donnons maintenant une traduction de l'introduction en espagnol.

La memoria de tesis doctoral titulada *Polinomios Multisimétricos* se dedica al estudio de los polinomios multisimétricos. Estos se definen como los polinomios en los coeficientes de la matriz :

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & z_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & z_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_r & b_r & \dots & z_r \end{bmatrix}$$

que permanecen invariantes bajo las permutaciones de las columnas de ésta y constituyen la generalización natural de los polinomios simétricos (caso que corresponde a $r = 1$).

Dos aspectos distintos sobre los polinomios multisimétricos son estudiados en esta memoria. En sus tres primeros capítulos, los polinomios multisimétricos son estudiados "por si mismos" : los coeficientes de la matriz $\mathbb{X}$ son variables independientes. Al contrario, en el último capítulo de la memoria, se estudian las funciones multisimétricas evaluadas en las raíces de ciertos sistemas de ecuaciones polinomiales ; aquellos que poseen un número finito de soluciones.

Los primeros estudios sistemáticos de los polinomios multisimétricos aparecen al final del siglo diecinueve : son los trabajos de Junker [42, 43, 44, 45, 46, 47] y de MacMahon [52]. Ambos introducen la definición para los análogos multisimétricos de las funciones simétricas monomiales, de las funciones simétricas elementales y de las sumas de potencias. El punto de vista de MacMahon es principalmente combinatorio, mientras que Junker está interesado en el cálculo de las relaciones entre los polinomios multisimétricos elementales.

Durante el siglo veinte, los polinomios multisimétricos hacen sólo apariciones breves. Son utilizados por Emmy Noether [58] y Hermann Weyl [85] en sus trabajos de Teoría de Invariantes.

Sin embargo, recientemente (desde finales del siglo veinte) los polinomios multisimétricos vuelven a la actualidad :

– En Geometría, porque el anillo de los polinomios multisimétricos es el anillo de coordenadas afín de una variedad algebraica parametrizando los productos de formas lineales (artículo de Amnon Neeman [57], trabajos de John Dalbec [22], y de Gelfand, Kapranov y Zelevinsky [30]). Las relaciones entre polinomios multisimétricos elementales se interpretan de forma natural como las ecuaciones de esta variedad inmersa en un espacio afín.
– En Combinatoria, Ira Gessel redescubre los trabajos de MacMahon [31] y Mercedes Rosas, en [65], adapta la presentación de Doubilet de los polinomios simétricos [24] a los polinomios multisimétricos .
– En Teoría de Invariantes para grupos finitos (especialmente los trabajos de Fleischmann [27]).
– En Teoría de la Eliminación para el estudio de los sistemas de ecuaciones polinomiales con un número finito de soluciones (u–resultante, trabajos de Tsikh, Aizenberg, Kytmanov reunidos en la monografia [12]).
– Y en otros campos que no se han considerado de forma explícita en la memoria (trabajos de Olver y Shabikan sobre las ecuaciones en derivadas parciales, [60], topología algebraica ([1] y el artículo muy reciente [26])).

El primer capítulo de esta memoria introduce, con toda generalidad, a los polinomios multisimétricos desarrollando sus primeras propiedades. Especialmente se presentan varias fórmulas explícitas para describir la transformación entre las diferentes familias de polinomios multisimétricos. Entre estas fórmulas, la nueva "fórmula de reducción" (proposición 1.9) tiene un papel destacado en el capítulo 3. También, y por primera vez, se determinan las condiciones necesarias y suficientes sobre el anillo de coeficientes para que los polinomios multisimétricos elementales generen el álgebra de los polinomios multisimétricos. Aplicando el Teorema de Eagon y Hochster de la Teoría de Invariantes para grupos finitos se pone de relieve, para el álgebra de los polinomios multisimétricos, la estructura natural de extensión entera de un álgebra de polinomios, estructura que explotamos intensamente en el capítulo 2. Nótese además que los polinomios multisimétricos elementales constituyen de hecho un sistema fundamental de invariantes.

El álgebra de los polinomios multisimétricos es también multigraduada. Se introducen varias fórmulas para su Serie de Hilbert-Poincaré que se interpretan también como fórmulas de enumeración de las particiones de un vector. Estas fórmulas son debidas esencialmente a Andrews y a Gessel & Garsia. También damos una presentación de estas fórmulas en el lenguaje del pletismo para las funciones simétricas, presentación que será utilizada para desarrollar el algoritmo de cálculo de relaciones entre los polinomios multisimétricos elementales que se introduce en el capítulo 2.

El capítulo 2 de la memoria presenta un nuevo algoritmo de cálculo para el ideal de todas las relaciones entre los polinomios multisimétricos elementales (sobre un cuerpo de característica zero). Los ingredientes que permiten desarrollar este algoritmo son los siguientes resultados que se introducen en el capítulo 1 : la consideración del anillo de los polinomios multisimétricos como anillo de invariantes de un grupo finito, con su sistema fundamental de invariantes natural, el conocimiento de su Serie de Hilbert-Poincaré multivariada y un método – esbozado por Junker en [44] y retomado por Dalbec en [22] que lo completa, justifica y utiliza – para el cálculo de todas las relaciones en multigrado dado (se reduce así el problema a calcular fórmulas de conversión entre ciertas familias de polinomios multisimétricos). El resultado de la aplicación de este algoritmo es una Base de Gröbner reducida (para un cierto orden) del ideal de las relaciones. Nótese que esta Base de Gröbner se obtiene sin utilizar en ningún momento el algoritmo de Buchberger).

Se ha utilizado con éxito este algoritmo en los casos donde la matriz $\mathbb{X}$ tiene $n = 4$ columnas y $r = 2$ filas, $n = 5$ columnas y $r = 2$ filas y $n = 3$ columnas y $r = 3$ filas. El ideal de las relaciones entre los polinomios multisimétricos elementales jamás había sido calculado en ninguno de estos tres casos.

El capítulo se termina mostrando el resultado de la aplicación del algoritmo al caso sencillo $n = 2$ (y r cualquiera) y un orden monomial bien elegido.

En el capítulo 3 se adopta un punto de vista geométrico. La conexión entre los polinomios multisimétricos y la subvariedad de formas totalmente factorizables es puesta de manifiesto de forma precisa. Este capítulo sigue la presentación ya hecha por Dalbec [22, 21] de los polinomios multisimétricos homogeneos, haciendo más precisos algunos de sus resultados. Las principales aportaciones de este capítulo de la memoria son las siguientes :

- Utilizando el teorema 1.19 del capítulo 1, que indica cuando los polinomios multisimétricos elementales generan el álgebra de los polinomios multisimétricos, mostramos que la aplicación natural del producto simétrico de orden n del espacio proyectivo sobre la Variedad de Chow de n puntos del espacio proyectivo nunca es un isomorfismo en característica positiva inferior o igual a n, completando de esta manera los resultados de Neeman en [57].
- Aplicando a los resultados de la aplicación del algoritmo, presentado en el capítulo 2, una "Gröbner walk", somos capaces de determinar el ideal de todas las ecuaciones polinomiales verificadas por una forma para ser totalmente factorizable en dos casos nunca calculados : las cúbicas en cuatro variables y las cuárticas ternarias. En estos dos casos, comparamos este ideal con el ideal de las ecuaciones de Brill. Se prueba de otra manera un resultado ya presente en [22] : que estos dos ideales difieren en un número infinito de componentes graduadas para el caso de las cúbicas en cuatro variables. Pero también probamos, por

primera vez, que, para el caso de las cuárticas ternarias, estos ideales, aunque diferentes, coinciden para grados grandes.

– Se da una nueva formulación combinatoria de la conjetura del "Plethysm" de Foulkes–Howe.

El último capítulo de la memoria se dedica al estudio de los polinomios multisimétricos evaluados en las raíces de ciertos sistemas de ecuaciones polinomiales con un número finito de soluciones. Se consideran los dos casos siguientes : primero, los sistemas de ecuaciones polinomiales que son una Base de Gröbner, para un orden monomial y monomios líderes fijados de antemano y, segundo, sistemas de ecuaciones polinomiales de peso prefijado definiendo una intersección completa estricta. Mostramos que, en estos dos casos, los polinomios multisimétricos evaluados en las raíces son, respectivamente, funciones polinomiales de los coeficientes del sistema, o funciones racionales de los coeficientes del sistema. Se muestra también que estos resultados son ciertos independientemente de la característica del cuerpo de partida.

Finalmente, damos una presentación algebraica de los resultados, debidos esencialemente a Tsikh, Aizenberg y Kytmanov, sobre las relaciones entre los coeficientes de los "sistemas de Pham generalizados" y las sumas de potencias multisimétricas evaluadas en sus raíces.

Chapitre 1

Généralités sur les polynômes multisymétriques

1.1 Les objets de l'étude

Nous présentons ici les objets étudiés dans ce chapitre : les polynômes multisymétriques. Ce sont des généralisations des polynômes symétriques. Nous commençons donc par de très brefs rappels sur les polynômes symétriques.

1.1.1 Brefs rappels sur les polynômes symétriques

Soit A un anneau (commutatif, comme ce sera toujours le cas pour les anneaux dans ce mémoire), et n variables $a, b, \dots, z$. Parmi les polynômes en ces variables avec coefficients dans A, les polynômes symétriques sont ceux qui sont inchangés par toute permutation de $a, b, \dots, z$.

L'algèbre des polynômes symétriques a une base de A-module naturelle : celle des symétrisés de monômes. Ces polynômes sont appelés *fonctions monomiales*. Ils sont indexés par les *partitions d'entiers* (ce sont les multi-ensembles d'entiers positifs).

Précisément, soit λ une partition de longueur $k \leq n$:

$$\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_k]$$

avec les λ_i dans $\mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non-nuls). Notons $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Alors la fonction monomiale m_λ est la somme des monômes dans l'orbite de $a^{\lambda_1} b^{\lambda_2} \cdots z^{\lambda_n}$ sous l'action du groupe symétrique qui permute les variables.

▷ **Exemple :** Dans le cas de $n = 3$ variables, on a :

$$\begin{array}{rcl} m_{[2]} & = & a^2 + b^2 + c^2 \\ m_{[1,1]} & = & ab + ac + bc \\ m_{[2,1]} & = & a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b \end{array}$$

◁

Des familles classiques de polynômes symétriques sont définies. Parmi elles :

- Les polynômes symétriques élémentaires :

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & a + b + \ldots + z \\ e_2 & = & ab + \ldots + az + \ldots + bz + \ldots \\ e_3 & = & \cdots + abz + \ldots \\ & \vdots & \end{array}$$

  Leur fonction génératrice est :

$$E(t) = \sum_{k=0}^{n} e_k t^k = (1 + at)(1 + bt) \cdots (1 + zt)$$

  Les fonctions symétriques élémentaires $e_k, k = 1, \ldots, n$, engendrent l'algèbre des polynômes symétriques, et sont algébriquement indépendantes.

- Les sommes de puissances :

$$\begin{array}{rcl} p_1 & = & a + b + \ldots + z \\ p_2 & = & a^2 + b^2 + \ldots + z^2 \\ & \vdots & \end{array}$$

  Leur fonction génératrice est :

$$P(t) = \sum_{k \geq 1} p_k t^k = \frac{at}{1 - at} + \frac{bt}{1 - bt} + \ldots + \frac{zt}{1 - zt}$$

  Les premières sommes de puissances $p_1, \ldots, p_n$ sont algébriquement indépendantes et engendrent l'algèbre des polynômes symétriques à coefficients rationnels, mais pas l'algèbre des polynômes symétriques à coefficients entiers.

- Les sommes complètes :

$$h_i = \sum_{j_a + j_b + \ldots + j_z = i} a^{j_a} b^{j_b} \cdots z^{j_z}$$

Leur fonction génératrice est :

$$1 + \sum_{k=0}^{n} h_k t^k = \frac{1}{(1-at)(1-bt)\cdots(1-zt)}$$

Les sommes complètes engendrent l'algèbre des polynômes symétriques, et sont algébriquement indépendantes.

Les fonctions monomiales, les fonctions élémentaires, les sommes de puissances, les sommes complètes s'expriment les unes en fonction des autres, à l'aide de formules de conversions que nous rappellerons au moment nécéssaire.

Notes

- Des ouvrages de référence sur la théorie des polynômes symétriques sont ceux de Macdonald [50], de Sagan [73], et le cours de Lascoux et Schützenberger [49].

1.1.2 Définition

Nous introduisons maintenant les polynômes multisymétriques. Nous en donnons aussi des exemples d'utilisation, qui motivent leur étude.

Nous considérons à nouveau un alphabet fini $a, b, \ldots, z$ à n lettres. Mais maintenant à chaque lettre nous associons une famille de r variables :

$$\begin{array}{c} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_r \\ \vdots \\ z_1, \ldots, z_r \end{array}$$

Définition 1.1 *Les polynômes multisymétriques en les familles de variables $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_r), \ldots, \boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_r)$ sont les polynômes en les variables $a_1, a_2, \ldots, z_r$ inchangés par toutes les permutations des lettres $a, b, \ldots, z$.*

Si l'on considère la matrice des variables :

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & z_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_r & b_r & \ldots & z_r \end{bmatrix}$$

alors il s'agit des polynômes en les coefficients de cette matrice, inchangés par toutes les permutations des colonnes.

▷ **Exemple :** Pour $n = r = 2$, les polynômes multisymétriques sont les polynômes P en a_1, a_2, b_1, b_2 avec la propriété :

$$P(a_1, a_2, b_1, b_2) = P(b_1, b_2, a_1, a_2)$$

Les polynômes suivants en font partie :
- les polynômes symétriques en l'une des lignes de la matrice, par exemple : $a_1 + b_1, \quad a_1 b_1, \quad a_2 + b_2, \quad a_2 b_2.$
- le permanent de la matrice des variables : $a_1 b_2 + a_2 b_1$.
- le carré du déterminant de la matrice des variables.

◁

Les polynômes multisymétriques à coefficients dans un anneau A forment une sous-algèbre de $A[a_1, a_2, \ldots, z_{r-1}, z_r]$. On note $\mathfrak{J}_n^r(A)$ cette sous-algèbre. La lettre $\mathfrak{J}$ est choisie en l'honneur de Friedrich Junker, l'un des premiers à avoir étudié ces objets [42, 43, 44, 45, 46, 47]. L'indice n rappelle qu'on considère une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n \cong \mathfrak{S}_{\{a,b,\ldots,z\}}$, le groupe des permutations de $\{a, \ldots, z\}$ et l'exposant r que les lettres permutées ont r composantes.

▷ **Exemple :** Donc $\mathfrak{J}_n^1(A)$ désigne l'algèbre des polynômes symétriques en n variables à coefficients dans A. ◁

De plus on munit $\mathfrak{J}_n^r(A)$ d'une graduation à valeurs dans $\mathbb{N}^r$ (où $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels) : pour tout x dans l'alphabet $a, b, \ldots, z$, on donne à la variable x_i le multidegré ξ_i (le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{Z}^r$, où $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs). On note $\operatorname{mdeg} P$ le multidegré d'un polynôme homogène P relativement à cette graduation.

Pour B une algèbre ainsi multigraduée, nous noterons $B_{\mathrm{mdeg}=\alpha}$ la composante homogène de multidegré α. Une telle algèbre est aussi graduée par $\mathbb{N}$: un élément homogène de multidegré α recevant le degré $|\alpha|$ (la notation $|\alpha|$ désigne la *norme* du vecteur α, c'est-à-dire la somme de ses coordonnées, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r$).

La composante homogène de degré k pour cette graduation est notée $B_{|\,\mathrm{mdeg}\,|=k}$.

▷ **Exemple :** Pour $n = r = 2$ on a $\operatorname{mdeg} a_1 = \operatorname{mdeg} b_1 = (1, 0)$ et $\operatorname{mdeg} a_2 = \operatorname{mdeg} b_2 = (0, 1)$, ce qui donne pour les exemples suivants de polynômes multisymétriques :

$$\begin{aligned}
\operatorname{mdeg}(a_1 + b_1) &= (1, 0) \\
\operatorname{mdeg}(a_1 b_1) &= (2, 0) \\
\operatorname{mdeg}(a_2 + b_2) &= (0, 1) \\
\operatorname{mdeg}(a_2 b_2) &= (0, 2) \\
\operatorname{mdeg}(a_1 b_2 + a_2 b_1) &= (1, 1)
\end{aligned}$$

◁

1.1.3 Les polynômes multisymétriques élémentaires

Nous définissons un analogue de la famille des polynômes symétriques élémentaires.

Définition 1.2 *On définit une famille de polynômes multisymétriques e_α pour α parcourant $\mathbb{N}^r$, par leur série génératrice :*

$$E(\mathbf{t}) = E(t_1, \ldots, t_r) = \sum_\alpha e_\alpha \mathbf{t}^\alpha = (1 + a_1 t_1 + \ldots + a_r t_r)(1 + b_1 t_1 + \ldots + b_r t_r) \cdots (1 + z_1 t_1 + \ldots + z_r t_r) \tag{1.1}$$

En particulier, $e_0 = 1$ *et* $e_\alpha = 0$ *pour* $|\alpha| > n$*, Les* polynômes multisymétriques élémentaires *sont les* e_α*, pour* $0 < |\alpha| \leq n$*.*

Cette définition est justifiée en 1.2.3.

Pour $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \in \mathbb{N}^r$ et la famille $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ nous notons $\boldsymbol{a}^\beta$ le produit $a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \cdots a_r^{\beta_r}$.

Explicitement on a :

$$e_\alpha = \sum \boldsymbol{a}^{\beta^{(a)}} \boldsymbol{b}^{\beta^{(b)}} \cdots \boldsymbol{z}^{\beta^{(z)}}$$

la somme étant étendue à pour tous les choix de vecteurs $\beta^{(a)}, \beta^{(b)}, \ldots, \beta^{(z)}$ avec α_1 occurences de ξ_1 (le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{Z}^r$), α_2 occurences de ξ_2, *etc...*, α_r occurences de ξ_r, et des occurences du vecteur nul pour compléter.

▷ **Exemple :** Pour $r = 2, n = 2$, il y a cinq polynômes multisymétriques élémentaires. Quatre d'entre eux sont en fait des polynômes symétriques élémentaires en les coefficients de l'une des lignes de la matrice des variables :

$$\begin{aligned} e_{1,0} &= \boldsymbol{a}^{\xi_1} + \boldsymbol{b}^{\xi_1} && = a_1 + b_1 \\ e_{2,0} &= \boldsymbol{a}^{\xi_1} \boldsymbol{b}^{\xi_1} && = a_1 \cdot b_1 \\ e_{0,1} &= \boldsymbol{a}^{\xi_2} + \boldsymbol{b}^{\xi_2} && = a_2 + b_2 \\ e_{0,2} &= \boldsymbol{a}^{\xi_2} \boldsymbol{b}^{\xi_2} && = a_2 \cdot b_2 \end{aligned}$$

Le dernier polynôme multisymétrique élémentaire est "mixte" :

$$e_{1,1} = \boldsymbol{a}^{\xi_1} \boldsymbol{b}^{\xi_2} + \boldsymbol{a}^{\xi_2} \boldsymbol{b}^{\xi_1} = a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1$$

◁

Considérons le cas des polynômes multisymétriques à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Il est remarquable que la fonction génératrice des e_α soit un polynôme en r variables qui est produit de facteurs de degré 1. Dans le cas $r = 1$ ceci n'implique aucune relation algébrique entre les e_k car tout polynôme en une variable est produit de facteurs de degré 1 dans une extension algébrique convenable du corps de base. Il en va autrement lorsque $r > 1$. Dans l'espace des polynômes de degré au plus n, le sous-ensemble des produits de facteurs de degré 1 est une sous-variété propre, et les e_α sont donc liés par les équations définissant cette sous-variété. Ce point de vue est détaillé dans le chapitre 3. Le lien précis entre les polynômes multisymétriques élémentaires et la sous-variété des polynômes produits de facteurs de degré 1 y est explicité.

De façon générale, l'existence de relations entre les polynômes multisymétriques éémentaires est assurée par l'argument suivant : il y a $\binom{n+r}{r} - 1$ polynômes multisymétriques élémentaires dans $\mathfrak{I}_n^r(A)$, strictement plus que le nombre (nr) de leurs variables $a_1, \ldots, z_r$ dès lors que $r > 1$ et $n > 1$.

▷ **Exemple :** Considérons le cas $n = r = 2$. Le polynôme en t_1, t_2 :

$$1 + e_{1,0}\ t_1 + e_{0,1}\ t_2 + e_{2,0}\ t_1^2 + e_{1,1}\ t_1 t_2 + e_{0,2}\ t_2^2$$

est produit de facteurs de degré 1. Par suite, la forme quadratique obtenue par homogénéisation est dégénérée. Autrement dit, le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2e_{2,0} & e_{1,1} & e_{1,0} \\ e_{1,1} & 2e_{0,2} & e_{0,1} \\ e_{1,0} & e_{0,1} & 2 \end{vmatrix}$$

est nul, d'où une relation :

$$e_{1,1}^2 - e_{1,0}e_{0,1}e_{1,1} - 4e_{2,0}e_{0,2} + e_{0,2}e_{1,0}^2 + e_{2,0}e_{0,1}^2 = 0$$

Nous verrons plus tard que c'est la seule relation pour $n = r = 2$. ◁

Un problème central de la théorie des polynômes multisymétriques est de déterminer toutes les relations entre les polynômes multisymétriques élémentaires.

1.1.4 Les sommes de puissances multisymétriques

Nous introduisons aussi des analogues des sommes de puissances.

Définition 1.3 *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$, où $\mathbf{0}$ désigne le vecteur nul. On pose :*

$$p_\alpha = \boldsymbol{a}^\alpha + \boldsymbol{b}^\alpha + \ldots + \boldsymbol{z}^\alpha$$

C'est la somme de puissances multisymétrique *d'indice α.*

Les premières sommes de puissances *sont les sommes de puissances p_α avec $0 < |\alpha| \leq n$.*

▷ **Exemple :** Pour $r = 2, n = 2$, les premières sommes de puissances sont :

$$p_{1,0} = a_1 + b_1, \qquad p_{0,1} = a_2 + b_2$$
$$p_{2,0} = a_1^2 + b_1^2, \qquad p_{1,1} = a_1 a_2 + b_1 b_2, \qquad p_{0,2} = a_2^2 + b_2^2$$

Les sommes de puissances suivantes sont :

$$p_{3,0} = a_1^3 + b_1^3, \quad p_{2,1} = a_1^2 a_2 + b_1^2 b_2, \quad p_{1,2} = a_1 a_2^2 + b_1 b_2^2, \quad p_{0,3} = a_2^3 + b_2^3$$
$$\vdots$$

◁

Remarque : Il est tentant de poser $p_{\mathbf{0}} = n$. On évitera néanmoins de le faire, car cela pose des problèmes de cohérence dès lors qu'on fait varier le nombre de lettres n de l'alphabet $a, b, \ldots, z$. ⊡

L'introduction de cette famille est motivée par le problème suivant, entre autres. Soit un système d'équations polynomiales :

$$F_1 = 0, \ldots, F_k = 0$$

en r indéterminées $X_1, \ldots, X_r$, à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Soit $\mathbb{L}$ un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{K}$. On suppose que l'on sait que le système n'a qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbb{L}^r$, notons-les $a, b, \ldots, z$. Dans cette énumération $a, b, \ldots, z$ ne sont pas nécessairement deux à deux distincts, chaque racine apparaît autant de fois que le commande sa multiplicité. Les informations sur le n-multi-ensemble solution sont codées dans la structure du quotient de l'algèbre de polynômes par l'idéal engendré par les F_i :

$$\mathbb{A} = \mathbb{K}[\mathbf{X}]/\langle F_1, \ldots, F_k \rangle$$

où $\mathbf{X}$ désigne la suite de variables $(X_1, \ldots, X_r)$. On veut connaître le nombre de points – sans tenir compte des multiplicités cette fois – qui sont solution. Ce nombre est donné par le rang de la forme quadratique sur $\mathbb{A}$:

$$P \mapsto P(a)^2 + P(b)^2 + \ldots + P(z)^2$$

Cette méthode pour compter le nombre de solutions s'appelle la *méthode de Hermite* (voir [33]). On peut déterminer une base de $\mathbb{A}$ formée d'images de monômes $\mathbf{X}^\alpha$,$\mathbf{X}^\beta$,…,$\mathbf{X}^\gamma$. Les coefficients de la matrice de cette forme quadratique, relativement à cette base, sont de la forme $\mathbf{X}^{\alpha+\beta}(a) + \mathbf{X}^{\alpha+\beta}(b) + \ldots + \mathbf{X}^{\alpha+\beta}(z)$, autrement dit ce sont des sommes de puissances $p_{\alpha+\beta}$ évaluées au multi-ensemble solution du système. Il est intéressant de chercher à calculer ces quantités à partir des coefficients du système, comme dans le cas d'une équation en une inconnue. Dans le cas multivarié, bien sûr, les choses se passent moins bien, néanmoins il existe des résultats dans ce sens. Le chapitre 4 de cette thèse est consacré à de tels résultats.

Concernant les sommes de puissances, il est facile de vérifier qu'on dispose des séries génératrices suivantes :

Proposition 1.1

$$n + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} p_\alpha \mathbf{t}^\alpha = \frac{1}{(1-a_1t_1)\cdot \ldots \cdot (1-a_rt_r)} + \frac{1}{(1-b_1t_1)\cdot \ldots \cdot (1-b_rt_r)} + \ldots + \frac{1}{(1-z_1t_1)\cdot \ldots \cdot (1-z_rt_r)} \tag{1.2}$$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}} \binom{|\alpha|}{\alpha} p_\alpha \mathbf{t}^\alpha = \frac{a_1t_1 + \ldots + a_rt_r}{1-(a_1t_1 + \ldots + a_rt_r)} + \frac{b_1t_1 + \ldots + b_rt_r}{1-(b_1t_1 + \ldots + b_rt_r)} + \ldots + \frac{z_1t_1 + \ldots + z_rt_r}{1-(z_1t_1 + \ldots + z_rt_r)} \tag{1.3}$$

où :

$$\binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_r!}$$

est le coefficient multinomial.

1.1.5 Fonctions monomiales, partitions de vecteurs

Une base naturelle de A-module de $\mathfrak{J}_n^r(A)$ est formée par les symétrisés de monômes. Nous introduisons maintenant cette base et les notations qui vont avec.

Définition 1.4 *Nous appelons* partition de vecteur *un multi-ensemble fini d'éléments de* $\mathbb{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Le nom a été choisi par analogie avec le cas $r = 1$ où l'on a affaire aux *partitions d'entiers.*

Soit une suite $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)})$ d'éléments de $\mathbb{N}^r$. Nous noterons $[\boldsymbol{\alpha}] = [\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)}]$ la partition de vecteur obtenue en oubliant les termes nuls, et l'ordre des termes.

Soit une partition de vecteur $\mathfrak{p}$. Il existe une suite de vecteurs non-nuls $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)})$ telle que $\mathfrak{p} = [\boldsymbol{\alpha}]$. Les termes de $\boldsymbol{\alpha}$ seront appelés les *parts de* $\mathfrak{p}$. L'entier k sera appelé *longueur* de la partition de vecteur $\mathfrak{p}$, et noté $\ell_{\mathfrak{p}}$. Le nombre d'occurences d'un vecteur non-nul β dans $\boldsymbol{\alpha}$ sera appelé *multiplicité de* β *dans* $\mathfrak{p}$ *et noté* $\mu_{\mathfrak{p}}(\beta)$. Le multi-ensemble des $\mu_{\mathfrak{p}}(\beta)$ pour β parcourant l'ensemble des parts de $\mathfrak{p}$ sera noté $\mu_{\mathfrak{p}}$, et on désignera par $\mu_{\mathfrak{p}}!$ l'entier :

$$\prod_{\beta} \mu_{\mathfrak{p}}(\beta)!$$

pour β parcourant l'ensemble des parts de β. Le vecteur $\alpha^{(1)} + \cdots + \alpha^{(k)}$ sera appelé *somme de* $\mathfrak{p}$ et noté $s(\mathfrak{p})$. Soit $\gamma \in \mathbb{N}^r$. Soit $\mathfrak{p}$ une partition de vecteur avec $s(\mathfrak{p}) = \gamma$. On dira que $\mathfrak{p}$ *est une partition de* γ, et on notera aussi $\mathfrak{p} \vdash \gamma$. Il sera pratique d'utiliser aussi une notation multiplicative pour les partitions de vecteurs. Soient des vecteurs distincts $\alpha, \beta, \ldots$ de $\mathbb{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ et des entiers positifs ou nuls $\mu_\alpha, \mu_\beta, \ldots$ Par $[\alpha^{\mu_\alpha} \beta^{\mu_\beta} \cdots]$ on désignera la partition avec μ_α parts égales à α, μ_β parts égales à β, *etc...*

Ces notations sont en accord avec les notations usuelles pour les partitions d'entiers : la longueur d'une partition d'entier λ est notée ℓ_λ, le multi-ensemble des multiplicités de ses parts μ_λ et le produit des factorielles des termes de ce dernier multi-ensemble $\mu_\lambda!$. La somme de λ est notée usuellement $|\lambda|$, et on écrit $\lambda \vdash |\lambda|$; pour la somme d'une partition de vecteur, la notation $|\mathfrak{p}|$ semblerait désigner un entier, c'est pourquoi nous avons préféré la nouvelle notation $s(\mathfrak{p})$.

▷ **Exemple :** Énumérons les partitions du vecteur $(2, 1)$:
- $[(2, 1)]$, de longueur 1, avec 1 part, de multiplicité donnée par $[1]$.
- $[(2, 0), (0, 1)]$, de longueur 2, avec 2 parts distinctes, de multiplicité donnée par $[1, 1]$.
- $[(1, 1), (1, 0)]$, de longueur 2, avec 2 parts distinctes, de multiplicité donnée par $[1, 1]$.
- $[(1, 0), (1, 0), (0, 1)] = [(1, 0)^2(0, 1)]$, de longueur 3, avec 2 parts distinctes, de multiplicité donnée par $[1, 2]$.

◁

Une base de A-module de $\mathfrak{I}_n^r(A)$ est naturellement obtenue en symétrisant les monômes. Étant donné un monôme $M = \boldsymbol{a}^{\alpha^{(a)}} \boldsymbol{b}^{\alpha^{(b)}} \ldots \boldsymbol{z}^{\alpha^{(z)}}$, il est naturel d'associer au polynôme obtenu par symétrisation la partition de vecteur $[\alpha^{(a)}, \alpha^{(b)}, \ldots, \alpha^{(z)}]$.

Définition 1.5 *Soit* $\mathfrak{p}$ *une partition de vecteur de* $\mathbb{N}^r$ *de longueur au plus* n. *La* fonction monomiale d'indice $\mathfrak{p}$ *est le polynôme multisymétrique :*

$$m_{\mathfrak{p}} = \sum \boldsymbol{a}^{\alpha^{(a)}} \boldsymbol{b}^{\alpha^{(b)}} \cdots \boldsymbol{z}^{\alpha^{(z)}}$$

où la somme est étendue à toutes les suites $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(a)}, \alpha^{(b)}, \ldots, \alpha^{(z)})$ *telles que* $[\boldsymbol{\alpha}] = \mathfrak{p}$.

▷ **Exemple :** Dans $\mathfrak{J}_3^2(\mathbb{Z})$, on a :

$$\begin{aligned} m_{[(1,0)^2(1,1)]} &= \boldsymbol{a}^{(1,0)}\boldsymbol{b}^{(1,0)}\mathbf{c}^{(1,1)} + \boldsymbol{a}^{(1,0)}\boldsymbol{b}^{(1,1)}\mathbf{c}^{(1,0)} + \boldsymbol{a}^{(1,1)}\boldsymbol{b}^{(1,0)}\mathbf{c}^{(1,0)} \\ &= a_1b_1c_1c_2 + a_1b_1b_2c_1 + a_1a_2b_1c_1 \end{aligned}$$

◁

Remarquons que les sommes de puissances et les polynômes élémentaires sont des cas particuliers de fonctions monomiales. Ainsi, les sommes de puissances sont les fonctions monomiales dont l'indice est une partition de longueur 1 :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}, \qquad p_\alpha = m_{[\alpha]}$$

Les polynômes élémentaires sont les fonctions monomiales dont l'indice est une partition dont toutes les parts sont de norme 1 (donc des vecteurs ξ_i de la base canonique de $\mathbb{Z}^r$) :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}, \qquad e_\alpha = m_{[\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_r^{\alpha_r}]}$$

Introduisons encore une notation. Soit une famille d'éléments f_v d'une algèbre indexée par les éléments v de $\mathbb{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$. Pour une partition de vecteur $\mathfrak{p} = [\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(k)}]$ on note $f_\mathfrak{p}$ le produit $f_{\alpha^{(1)}}f_{\alpha^{(2)}}\cdots f_{\alpha^{(k)}}$.

1.1.6 L'algèbre de MacMahon

Soit A un anneau. Pour étudier les $\mathfrak{J}_n^r(A)$ il est utile d'introduire une algèbre de polynômes multisymétriques en une infinité de variables, en copiant la construction de l'algèbre des polynômes symétriques. Cette algèbre sera notée $\mathfrak{M}^r(A)$ et appelée *algèbre de MacMahon* (en effet, ce sont les fonctions multisymétriques de cette algèbre que MacMahon étudie dans [52], car elles se comportent mieux combinatoirement que celles de $\mathfrak{J}_n^r(\mathbb{Q})$; à l'opposé, Junker s'intéresse aux relations entre polynômes multisymétriques élémentaires, qui disparaissent lorsqu'on passe des $\mathfrak{J}_n^r(\mathbb{Q})$ à $\mathfrak{M}^r(\mathbb{Q})$, comme nous le verrons).

On considère un alphabet infini (dénombrable) $a, b, \ldots$ et à chacune des lettres on associe r variables "coordonnées", ce qui donne un ensemble infini de variables $\mathcal{A}^r = \{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r, \ldots\}$. Le groupe des permutations de $\{a, b, \ldots\}$ agit diagonalement sur l'algèbre $A[[\mathcal{A}^r]]$ des séries formelles en ces variables et à coefficients dans A.

Définition 1.6 L'algèbre de MacMahon $\mathfrak{M}^r(A)$ *est la sous-algèbre de* $A[[\mathcal{A}^r]]$ *formée par les éléments invariants par toute permutation des lettres et qui n'ont qu'un nombre fini de composantes homogènes.*

On munit $\mathfrak{M}^r(A)$ d'une graduation à valeurs dans $\mathbb{N}^r$: c'est la graduation induite par $\operatorname{mdeg} x_i = \xi_i$, le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{Z}^r$, pour tout x dans l'alphabet $a, b, \ldots$

Lorsque $r = 1$, l'algèbre de MacMahon $\mathfrak{M}^1(\mathbb{Z})$ est l'algèbre dite *des fonctions symétriques*. C'est celle qui est notée Λ chez Macdonald [50].

Le A-module $\mathfrak{M}^r(A)$ est libre. Une base est formée par les symétrisés de monômes, que nous notons $\boldsymbol{m}_{\mathfrak{p}}$ et appelons encore *fonctions monomiales* (remarquer le passage au gras pour les distinguer des éléments de $\mathfrak{J}^r_n(A)$ définis similairement). Ici $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble de toutes les partitions de vecteur de $\mathbb{N}^r$, sans restriction sur la longueur.

Définition 1.7 *Soit $\mathfrak{p} = [\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(k)}]$ une partition de vecteur de $\mathbb{N}^r$. Pour $i > k$ posons $\alpha^{(i)} = \mathbf{0}$. La fonction monomiale d'indice $\mathfrak{p}$ est :*

$$\boldsymbol{m}_{\mathfrak{p}} = \sum_M M$$

pour M parcourant l'orbite de $\boldsymbol{a}^{\alpha^{(1)}} \cdot \boldsymbol{b}^{\alpha^{(2)}} \ldots$ sous l'action du groupe des parmutations de $\{a, b, \ldots\}$.

$\triangleright$ **Exemple :** Dans $\mathfrak{M}^2(A)$ on a :

$$\boldsymbol{m}_{[(1,1)^2]} = a_1a_2b_1b_2 + a_1a_2c_1c_2 + b_1b_2c_1c_2 + \ldots$$

$\triangleleft$

Notons $\mathcal{A}^r_n$ le sous-ensemble de $n \times r$ variables obtenu en ne gardant que les n preières lettres de l'alphabet $a, b, \ldots$. Par exemple :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^r_1 &= \{a_1, \ldots, a_r\} \\ \mathcal{A}^r_2 &= \{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r\}, \ldots \end{aligned}$$

Les sous-algèbres $A[[\mathcal{A}^r_n]]$ se projettent les unes sur les autres et s'incluent les unes dans les autres.

Soient $i < j$ des entiers naturels. On dispose du morphisme surjectif d'algèbres multigraduées :

$$A[[\mathcal{A}^r_j]] \twoheadrightarrow A[[\mathcal{A}^r_i]]$$

qui consiste à remplacer les $j-i$ dernières lettres dans A^r_j par 0, sans changer les i premières. Il induit un morphisme d'algèbres multigraduées caractérisé par son action sur la base de $\mathfrak{J}^r_j(A)$ formée par ses fonctions monomiales $m_{\mathfrak{p}}$:

$$\begin{aligned} \rho^j_i : \ \mathfrak{J}^r_j(A) &\twoheadrightarrow \mathfrak{J}^r_i(A) \\ m_{\mathfrak{p}} &\mapsto \begin{cases} m_{\mathfrak{p}} & \text{si} \quad \ell_{\mathfrak{p}} \leq i \\ 0 & \text{si} \quad i < \ell_{\mathfrak{p}} \leq j \end{cases} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ce morphisme admet comme section le morphisme injectif :

$$\begin{array}{rccc} \kappa_i^j : & \mathfrak{J}_i^r(A) & \hookrightarrow & \mathfrak{J}_j^r(A) \\ & m_{\mathfrak{p}} & \mapsto & m_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

Voici donc une autre façon de construire l'algèbre de MacMahon : on considère le système projectif des $\mathfrak{J}_n^r(A)$ avec morphismes ρ_i^j, dans la catégorie des A-algèbres gradués par $\mathbb{N}^r$. L'algèbre $\mathfrak{M}^r(A)$ est sa limite[1]. Les projections associées sont :

$$\begin{array}{rccc} \rho_n : & \mathfrak{M}^r(A) & \twoheadrightarrow & \mathfrak{J}_n^r(A) \\ & \boldsymbol{m}_{\mathfrak{p}} & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} m_{\mathfrak{p}} & \text{si} & \ell_{\mathfrak{p}} \leq n \\ 0 & \text{si} & \ell_{\mathfrak{p}} > n \end{array} \right. \end{array}$$

Encore une construction du même objet : les $\mathfrak{J}_n^r(A)$ munis des morphismes κ_i^j forment un système inductif dans la catégorie des A-algèbres graduées par $\mathbb{N}^r$. L'algèbre de MacMahon $\mathfrak{M}^r(A)$ est sa limite, munie des morphismes injectifs :

$$\begin{array}{rccc} \kappa_n : & \mathfrak{J}_n^r(A) & \hookrightarrow & \mathfrak{M}^r(A) \\ & m_{\mathfrak{p}} & \mapsto & \boldsymbol{m}_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

Le morphisme κ_n est section de ρ_n.

Une remarque encore : soient des entiers $d \leq i < j$. Alors les restrictions de ρ_i^j et κ_i^j aux composantes engendrées par les éléments homogènes de multidegré α avec $|\alpha|$ fixé :

$$\mathfrak{J}_i^r(A)_{|\,\mathrm{mdeg}\,|=d} \text{ et } \mathfrak{J}_j^r(A)_{|\,\mathrm{mdeg}\,|=d}$$

sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre. *A fortiori* il en va de même pour les restrictions de ρ_n et κ_n aux composantes $\mathfrak{J}_n^r(A)_{|\,\mathrm{mdeg}\,|=d}$ et $\mathfrak{M}^r(A)_{|\,\mathrm{mdeg}\,|=d}$, lorsque $d \leq n$.

En particulier, on pourra considérer $\mathfrak{M}^r(A)$ comme la réunion croissante des sous-modules :

$$\oplus_{d=0}^n \mathfrak{M}^r(A)_{|\,\mathrm{mdeg}\,|=d} \cong \oplus_{d=0}^n \mathfrak{J}_n^r(A)_{|\,\mathrm{mdeg}\,|=d}$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

Intéressons-nous aux images des polynômes multisymétriques élémentaires et des sommes de puissances multisymétriques dans l'algèbre de MacMahon.

[1]La limite projective dans la catégorie des algèbres graduées est obtenue en faisant la somme directe des limites projectives des composantes graduées (modules).

Définition 1.8 *Soit* $\alpha \in \mathbb{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$.

La fonction élémentaire *d'indice* α *est la fonction monomiale* $\boldsymbol{m}_{[\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_r^{\alpha_r}]}$.

C'est l'image des polynômes multisymétriques $e_\alpha \in \mathfrak{I}_n^r(A)$ *par* κ_n *pour* $n \geq |\alpha|$. *On la note* $\boldsymbol{e}_\alpha$ *(en gras pour le distinguer des* $e_\alpha \in \mathfrak{I}_n^r$*). On pose aussi :* $\boldsymbol{e}_{\mathbf{0}} = 1$.

La fonction somme de puissance *d'indice* α *est l'élément de* $\mathfrak{M}^r(A)$ *défini par :*

$$\boldsymbol{p}_\alpha = \boldsymbol{m}_{[\alpha]} = \boldsymbol{a}^\alpha + \boldsymbol{b}^\alpha + \ldots$$

C'est l'image des sommes de puissances $p_\alpha \in \mathfrak{I}_n^r(A)$ *par* κ_n*, pour* $n > 0$.

Remarque : Alors que dans $\mathfrak{I}_n^r$ il pouvait être légitime de poser $p_{\mathbf{0}} = n$, il ne peut pas y avoir d'élément $\boldsymbol{p}_{\mathbf{0}}$ dans $\mathfrak{M}^r$. $\boxdot$

La série génératrice des fonctions élémentaires :

$$E(\mathbf{t}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} \boldsymbol{e}_\alpha \mathbf{t}^\alpha$$

est donnée par le produit infini :

$$(1 + a_1 t_1 + \ldots + a_r t_r)(1 + b_1 t_1 + \ldots + b_r t_r) \cdots$$

déduit des formules semblables (1.1).

Pour les sommes de puissances, on déduit de (1.2) et (1.3) les séries génératrices :

$$\sum_{\alpha \neq \mathbf{0}} \boldsymbol{p}_\alpha \mathbf{t}^\alpha = \left(\frac{1}{(1 - a_1 t_1) \cdots (1 - a_r t_r)} - 1\right) + \left(\frac{1}{(1 - b_1 t_1) \cdots (1 - b_r t_r)} - 1\right) + \ldots$$

et :

$$\sum_{\alpha \neq \mathbf{0}} \binom{|\alpha|}{\alpha} \boldsymbol{p}_\alpha \mathbf{t}^\alpha = \left(\frac{a_1 t_1 + \ldots + a_r t_r}{1 - a_1 t_1 - \ldots - a_r t_r}\right) + \left(\frac{b_1 t_1 + \ldots + b_r t_r}{1 - b_1 t_1 - \ldots - b_r t_r}\right) + \ldots$$

1.2 Théorie des invariants appliquée aux polynômes multisymétriques

Dans cette section, on regarde les polynômes multisymétriques comme les invariants de l'action diagonale du groupe symétrique. L'application des théorèmes classiques de la théorie des invariants des groupes finis nous fournit des renseignements importants sur la structure de $\mathfrak{I}_n^r$, qui seront exploités dans la suite du mémoire.

En outre, nous mettons en évidence le fait que la définition des polynômes multisymétriques élémentaires et des sommes de puissances multisymétriques à partir de leurs analogues symétriques (définition due à Junker et MacMahon) est naturelle : c'est un cas particulier du processus classique de polarisation.

Par $\mathbb{K}$ on désigne dans cette section un corps quelconque.

1.2.1 Action diagonale et action séparée associées à l'action linéaire d'un groupe

Soit G un groupe fini agissant linéairement sur un espace vectoriel W de dimension finie n sur le corps $\mathbb{K}$.

Les *invariants de G* que nous considérons sont les éléments de l'algèbre symétrique SW de W, invariants pour l'action induite de G. Ils forment une sous-algèbre, notée $(SW)^G$.

À partir de l'action de G sur W on peut construire des actions de groupe sur $\oplus^r W$, la somme directe de r copies de W. Les invariants sont à chercher dans l'algèbre $S(\oplus^r W) \cong \otimes^r SW$, le produit tensoriel (sur $\mathbb{K}$) de r copies de SW. Cette algèbre est naturellement munie d'une graduation à valeurs dans $\mathbb{Z}^r$ (*multidegré*).

Définition 1.9

- *L'*action diagonale *de G sur $\oplus^r W \cong W^r$ est définie par :*

$$\forall g \in G, \quad \forall (v^{(1)}, \ldots, v^{(r)}) \in W^r, \qquad g \cdot \left(v^{(1)}, \ldots, v^{(r)}\right) = \left(g \cdot v^{(1)}, \ldots, g \cdot v^{(r)}\right)$$

- *L'*action séparée *de G^r sur W^r est définie par :*

$$\forall g_1, \ldots, g_r \in G, \quad \forall (v^{(1)}, \ldots, v^{(r)}) \in W^r, \qquad (g_1, \ldots, g_r) \cdot \left(v^{(1)}, \ldots, v^{(r)}\right) = \left(g_1 \cdot v^{(1)}, \ldots, g_r \cdot v^{(r)}\right)$$

On a l'inclusion suivante entre ces algèbres d'invariants :

$$(SW^r)^{G^r} \subset (SW^r)^G$$

L'algèbre des invariants séparés est facile à connaître : c'est $\otimes^r (SW)^G$. En revanche, connaître l'algèbre des invariants diagonaux est plus délicat.

L'*action par permutations* du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est l'action sur $W = \mathbb{K}^n$ par permutation des coordonnées. Notons $a, b, \ldots, z$ la base canonique de $W = \mathbb{K}^n$, et $a_i, b_i, \cdots z_i$ la base correspondante dans une copie W_i de E, pour $i = 1 \ldots r$. Alors on reconnaît que :

L'algèbre $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{K})$ des polynômes multisymétriques est précisément l'algèbre des invariants diagonaux de la représentation par permutations du groupe symétrique.

1.2.2 Ce que la théorie des invariants des groupes finis enseigne sur la structure de $\mathfrak{I}_n^r$

Nous rappelons certains résultats de la théorie des invariants des groupes finis. Nous renvoyons le lecteur à [81] ou à [76] pour une exposition de cette théorie. Soit G un groupe fini agissant linéairement sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de dimension finie. La sous-algèbre d'invariants $(S\mathcal{W})^G$ de $S\mathcal{W}$ est de type fini (ceci implique en particulier qu'elle est noethérienne). D'autre part, chaque $f \in S\mathcal{W}$ est solution d'une équation de dépendance entière sur ce sous-anneau, à savoir l'équation en X :

$$\prod_{g \in G} (X - g \cdot f) = 0$$

Ainsi $S\mathcal{W}$ est une extension entière de $S\mathcal{W}^G$, bien sûr de type fini, l'étant déjà sur $\mathbb{K}$. Donc $S\mathcal{W}$ et $S\mathcal{W}^G$ ont même dimension de Krull (la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{W}$).

Un *système homogène de paramètres* $\theta_1, \ldots, \theta_d$ d'une $\mathbb{K}$-algèbre graduée de type fini est une famille maximale d'éléments homogènes $\mathbb{K}$-algébriquement indépendants, autrement dit une famille formée d'éléments homogènes algébriquement indépendants en nombre égal à la dimension de Krull de cette algèbre (le lemme de normalisation de Noether assure de l'existence d'une telle famille, voir par exemple [76]).

Théorème 1.2 *On suppose que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, ou de caractéristique positive première avec le cardinal $\#G$ du groupe. On suppose que l'on dispose d'éléments $\theta_1, \ldots, \theta_d$, formant un système homogène de paramètres de $S\mathcal{W}^G$ (donc $d = \dim \mathcal{W}$). Notons $T = \mathbb{K}[\theta_1, \ldots, \theta_d]$. Alors :*

- *$S\mathcal{W}^G$ est un module libre de rang fini sur T, et admet une base formée d'éléments homogènes.*
- *Une famille d'éléments homogènes de $S\mathcal{W}^G$ est une base de T-module si et seulement si la famille de leurs images dans $S\mathcal{W}^G / \langle \theta_1, \ldots, \theta_d \rangle$ (l'algèbre-quotient* modulo *l'idéal engendré par les θ_i) est une base d'espace vectoriel.*
- *Soient $\delta_1, \ldots, \delta_d$ les degrés des θ_i. Alors le rang de $S\mathcal{W}^G$ sur T est :*

$$\frac{\delta_1 \cdots \delta_d}{\#G} \tag{1.5}$$

Preuve : Voir par exemple [81], théorème 2.3.1 et proposition 2.3.6. ■

Définition 1.10 *Soit $\theta_1, \ldots, \theta_d$ un système homogène de paramètres de $S\mathcal{W}^G$, et soit $\eta_1, \ldots, \eta_k$ une base de $S\mathcal{W}^G$ sur $\mathbb{K}[\theta_1, \ldots, \theta_d]$. La décomposition :*

$$S\mathcal{W}^G = \bigoplus_j \mathbb{K}[\theta_1, \ldots, \theta_d]\, \eta_j$$

est dite décomposition de Hironaka *de l'algèbre d'invariants. Les θ_i sont appelés* invariants primaires, *et les η_j* invariants secondaires *de la décomposition.*

Appliquons ces résultats au cas des polynômes multisymétriques. Supposons le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, ou de caractéristique positive strictement supérieure à n. Ici $\mathcal{W} = W^r$ pour $W = \mathbb{K}^n$.

Parmi les polynômes multisymétriques élémentaires, certains ne dépendent que des variables $a_1, b_1, \ldots, z_1$, d'autres ne dépendent que des variables $a_2, b_2, \ldots, z_2$, *etc...* Ce sont les polynômes symétriques en l'un des r groupes de variables de même indice. En réunissant les r familles de polynômes symétriques élémentaires en un groupe de vraiables de même indice, on obtient une famille d'éléments algébriquement indépendants, homogènes (pour le multidegré), et ils sont au nombre de $n\, r$, la dimension de Krull de $\mathcal{W}$. Ils forment donc un système homogène de paramètres de $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{K})$.

Naturellement, nous prendrons les autres polynômes multisymétriques élémentaires comme candidats pour être invariants secondaires. Anticipant les résultats de la section 1.4, nous posons la définition :

Définition 1.11 *Nous appelons polynômes multisymétriques élémentaires* primaires *ceux des polynômes multisymétriques élémentaires qui ne dépendent que des variables $a_i, b_i, \ldots, z_i$ pour un certain indice i. Ce sont donc les $e_{k\xi_i}$ pour $k = 1, \ldots, n, i = 1, \ldots, r$. Autrement dit, ce sont les e_α pour α dont toutes les coordonnées sont nulles sauf une.*

Les autres polynômes multisymétriques élémentaires seront dits secondaires.

On note aussi $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{K})$ la sous-algèbre engendrée par les polynômes multisymétriques élémentaires primaires.

Alors $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{K})$ est exactement la sous-algèbre des invariants séparés de $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{K})$. On a donc, comme conséquence de cette remarque et du théorème 1.2 :

Proposition 1.3 *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, ou de caractéristique positive strictement supérieure à n.*

Alors $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{K})$ est un module libre sur $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{K})$, de rang $(n!)^{r-1}$.

▷ **Exemple :** Considérons le cas le plus simple, celui de $\mathfrak{I}_2^2(\mathbb{K})$. Il y a quatre polynômes multisymétriques élémentaires primaires : $e_{1,0}, e_{2,0}, e_{0,1}, e_{0,2}$, et un secondaire : $e_{1,1}$. Le résultat précédent nous apprend que $\mathfrak{I}_2^2(\mathbb{K})$ est un module libre de rang 2 sur $\mathcal{T}_2^2 = \mathbb{K}[e_{1,0}, e_{2,0}, e_{0,1}, e_{0,2}]$, et de plus qu'on peut extraire une base de la famille $1, e_{1,1}, e_{1,1}^2, \ldots$, disons $(e_{1,1}^i, e_{1,1}^j)$ avec $i < j$.

Il apparaît clairement que, pour des raisons de degré, nécessairement $i = 0, j = 1$.

Ainsi :

$$\mathfrak{I}_2^2(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_2^2(\mathbb{K}) \oplus e_{1,1}\mathcal{T}_2^2(\mathbb{K})$$

et l'idéal des relations entre ces polynômes multisymétriques élémentaires est engendré par une une seule relation, de la forme :

$$e_{1,1}^2 + \bullet e_{1,1} + \bullet = 0$$

où les $\bullet$ sont des éléments de $\mathcal{T}_2^2(\mathbb{Q})$.

Nous avons déjà trouvé cette relation en 1.1.3, c'est :

$$e_{1,1}^2 = (e_{1,0}e_{0,1})e_{1,1} + (4e_{2,0}e_{0,2} - e_{0,2}e_{1,0}^2 - e_{2,0}e_{0,1}^2)$$

◁

1.2.3 Le procédé de polarisation

Soit G un groupe agissant linéairement sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel W. Le procédé suivant, appelé *polarisation*, permet de produire des invariants diagonaux à partir d'invariants de l'action initiale. Soit l'application diagonale :

$$\begin{array}{ccc} W & \to & \oplus^r W \\ v & \mapsto & (v, \ldots, v) \end{array}$$

Pour $v \in W$ nous notons $v_{(1)} = (v, 0, \ldots, 0), v_{(2)} = (0, v, 0, \ldots, 0)$, *etc.*.. Alors l'application diagonale consiste à remplacer v par $v_{(1)} \ldots + v_{(r)}$. Elle induit un morphisme d'algèbres :

$$\Delta^r : SW \to S(\oplus^r W) \cong \otimes^r SW$$

L'algèbre $\otimes^r SW$ est naturellement munie d'une multigraduation à valeurs dans $\mathbb{Z}^r$. Nous notons $\Delta^r_\alpha(f)$ la composante homogène de multidegré $\alpha \in \mathbb{N}^r$ de $\Delta^r(f)$. Le morphisme Δ^r_α est appelé *opérateur d'α-polarisation.*

Si $f \in SW$ est invariant pour l'action de G alors $\Delta^r(f)$ est invariant pour l'action diagonale associée. Celle-ci est compatible à la graduation de $\otimes^r SW$. Ainsi les $\Delta^r_\alpha(f)$ sont des invariants diagonaux.

Ceci nous permet de justifier les définitions données précédemment des polynômes multisymétriques élémentaires et des sommes de puissances multisymétriques : ils sont obtenus par polarisation de leurs analogues classiques.

Proposition 1.4 *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^r$ avec $|\alpha| = k$. Alors :*

$$\Delta^r_\alpha(e_k) = e_\alpha$$
$$\Delta^r_\alpha(p_k) = \binom{k}{\alpha} p_\alpha$$

Preuve : Nous ne traitons que le cas des polynômes multisymétriques élémentaires, celui des sommes de puissances est semblable.

Rappelons la série génératrice des polynômes symétriques élémentaires :

$$1 + \sum_{k=1}^{n} e_k t^k = (1 + at) \cdots (1 + zt)$$

Nous pouvons oublier t, qui n'est là que pour marquer le degré :

$$1 + \sum_{k=1}^{n} e_k = (1 + a) \cdots (1 + z)$$

Appliquons Δ^r et décomposons le membre de gauche en composantes homogènes, il vient :

$$1 + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^r \\ 0 < |\alpha| \leq n}} \Delta^r_\alpha(e_{|\alpha|}) = (1 + a_1 + \ldots + a_r) \cdots (1 + z_1 + \ldots + z_r)$$

Ré-introduisons $t_1, \ldots, t_r$ pour marquer les degrés :

$$1 + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^r \\ 0 < |\alpha| \leq n}} \Delta^r_\alpha(e_{|\alpha|}) \mathbf{t}^\alpha = (1 + a_1 t_1 + \ldots + a_r t_r) \cdots (1 + z_1 t_1 + \ldots + z_r t_r)$$

Nous reconnaissons à droite le fonction génératrice qui définit les polynômes multisymétriques élémentaires. En identifiant les coefficients on constate que les polynômes multisymétriques élémentaires sont précisément les polarisés des polynômes symétriques élémentaires. ■

Remarque : Il est possible aussi de définir des analogues multisymétriques des sommes complètes par polarisation : $h_\alpha = \Delta^{(r)}_\alpha(h_{|\alpha|})$. Ces fonctions ne sont *pas* les fonctions $\sum_{\beta^{(a)} + \ldots + \beta^{(z)} = \alpha} \boldsymbol{a}^{\beta^{(a)}} \boldsymbol{b}^{\beta^{(b)}} \cdots \boldsymbol{z}^{\beta^{(z)}}$, qui d'ailleurs se factorisent en produits de sommes complètes classiques.

Comme nous ne connaissons pas d'application de ces fonctions h_α, nous n'avons pas développé leur étude dans ce travail. ⊡

Dans la section suivante nous tirerons parti du procédé de polarisation pour transférer les formules de conversion entre familles classiques de polynômes symétriques en formules de conversion entre leurs analogues multisymétriques.

Notes

- La présentation du procédé de polarisation que nous donnons ici est celle de Larry Smith [76]. Dans l'annexe A nous faisons le lien entre cette présentation et la présentation plus fréquemment recontrée en termes d'opérateurs différentiels.
- La remarque du fait que ce que nous appelons les polynômes multisymétriques élémentaires primaires (définition 1.11) forment un système homogène de paramètres est due à Stanley [77], mais n'avait pas, à notre connaissance, été exploitée pour étudier en détail les algèbres $\mathfrak{J}_n^r(\mathbb{Q})$.

1.3 Formulaire

Nous présentons des formules pour exprimer les éléments remarquables (les sommes de puissances, les polynômes élémentaires, les fonctions monomiales) de $\mathfrak{J}_n^r(A)$ les uns en fonction des autres. Ces formules sont obtenues par diverses méthodes : polarisation des identités entre polynômes symétriques, dénombrements de rectangles latins, et étude de l'inversion de Möbius dans le treillis des partitions d'un ensemble fini. Pour finir nous montrons que ces formules s'interprêtent aussi dans la théorie des permanents.

1.3.1 Formules obtenues par polarisation

Nous commençons par quelques rappels de faits très connus sur les polynômes symétriques. Les polynômes symétriques élémentaires et les sommes de puissances symétriques sont liées par les *identités de Newton* :

$$\forall k \geq 1, \qquad p_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i e_i p_{k-i} + k(-1)^k e_k = 0 \tag{1.6}$$

Rappelons qu'on a défini les séries génératrices :

$$E(t) = \sum_{k \geq 0} e_k t^k$$

et

$$P(t) = \sum_{k > 0} p_k t^k$$

Les identités de Newton sont équivalentes à la relation :

$$E(t)P(-t) = -t \frac{\partial E(t)}{\partial t} \tag{1.7}$$

En exploitant ces relations on obtient les formules :

$$P(-t) = -t \frac{\partial}{\partial t} \log E(t) \tag{1.8}$$

$$E(t) = \exp\left(\sum_{k>0}(-1)^{k-1}p_k\frac{t^k}{k}\right) \tag{1.9}$$

Rappelons la formule de composition des séries formelles. Soient des séries formelles :

$$f(t) = \sum_{k\geq 0} f_k t^k$$

et :

$$g(t) = \sum_{k\geq 1} g_k t^k$$

Alors :

$$f(g(t)) = \sum_{\lambda} f_{\ell_\lambda}\frac{\ell_\lambda!}{\mu_\lambda!}g_\lambda t^{|\lambda|}$$

la somme étant étendue à toutes les partitions d'entiers. Cette formule permet de déduire des identités entre fonctions génératrices les expressions explicites :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (-1)^k e_k = \sum_{\lambda\vdash k}\frac{(-1)^{\ell_\lambda}}{\mu_\lambda!}q_\lambda \tag{1.10}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad (-1)^k q_k = \sum_{\lambda\vdash k}\frac{(\ell_\lambda-1)!}{\mu_\lambda!}(-1)^{\ell_\lambda}e_\lambda \tag{1.11}$$

où l'on a posé, pour simplifier les notations : $q_k = p_k/k$.

Par polarisation des identités de Newton (1.6) on obtient directement des relations entre polynômes multisymétriques élémentaires et sommes de puissances multisymétriques :

Proposition 1.5 (Identités de Newton multisymétriques dans $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Z})$)

$$\forall\gamma \in \mathbb{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\},$$
$$\binom{|\gamma|}{\gamma}p_\gamma + \sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma\\ \alpha\in\mathbb{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}\\ \beta\in\mathbb{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}}}(-1)^{|\alpha|}\binom{|\beta|}{\beta}p_\beta e_\alpha + (-1)^{|\gamma|}|\gamma|e_\gamma = 0 \tag{1.12}$$

Les identités de Newton multisymétriques, utilisées de façon répétée, permettent d'exprimer les sommes de puissances multisymétriques en fonction des polynômes multisymétriques élémentaires, et *vice-versa*, dans $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$. Il faut prendre garde au fait que le terme de tête et le terme de queue dans (1.12) ne sont pas unitaires, aussi ces identités ne peuvent pas remplir le même rôle dans les $\mathfrak{I}_n^r(A)$ si les entiers ne sont pas tous inversibles dans A.

Nous donnons maintenant les présentations en terme de fonctions génératrices des identités de Newton multisymétriques (analogues de (1.9) et (1.8)), dont on déduit directement les expressions explicites des e_α en fonction des p_β, et les expressions réciproques.

Proposition 1.6 *Dans* $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$ *on a :*

$$E(\mathbf{t}) = \exp\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} (-1)^{|\alpha|-1}\frac{1}{|\alpha|}\binom{|\alpha|}{\alpha}p_\alpha \mathbf{t}^\alpha\right) \tag{1.13}$$

et dans $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Z})$ *on a :*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} (-1)^{|\alpha|-1}\binom{|\alpha|}{\alpha}p_\alpha \mathbf{t}^\alpha = \frac{1}{E(\mathbf{t})}\sum_{i=1}^r t_i \frac{\partial E(\mathbf{t})}{\partial t_i} \tag{1.14}$$

Rappelons que pour une partition de vecteur de $\mathbb{N}^r$: $\mathfrak{p} = [\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)}]$, et pour une suite d'éléments g_β indexés par les $\beta \in \mathbb{N}^r$, nous notons $g_\mathfrak{p}$ le produit $g_{\alpha^{(1)}} \cdots g_{\alpha^{(r)}}$. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1.7 *Soient des séries formelles*

$$f(u) = \sum_{k\geq 0} f_k u^k$$

et

$$g(t_1, \ldots, t_r) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}} g_\alpha \mathbf{t}^\alpha$$

Alors :

$$f(g(t_1, \ldots, t_r)) = \sum_{\mathfrak{p}} f_{\ell_\mathfrak{p}}\frac{\ell_\mathfrak{p}!}{\mu_\mathfrak{p}!} g_\mathfrak{p} t^{s(\mathfrak{p})}$$

la somme étant étendue à toutes les partitions de vecteur $\mathfrak{p}$ *de* $\mathbb{N}^r$*.*

Pour simplifier l'écriture des formules qui suivent, nous notons :

$$q_\beta = \binom{|\beta|}{\beta}\frac{1}{|\beta|}p_\beta$$

Alors il vient :

Corollaire 1.8

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^r, \quad (-1)^{|\alpha|}e_\alpha = \sum_{\mathfrak{p}\vdash\alpha}\frac{(-1)^{\ell_\mathfrak{p}}}{\mu_\mathfrak{p}!}q_\mathfrak{p} \tag{1.15}$$

Et :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^r\setminus\{\mathbf{0}\}, \quad (-1)^{|\alpha|}q_\alpha = \sum_{\mathfrak{p}\vdash\alpha}\frac{(\ell_\mathfrak{p}-1)!}{\mu_\mathfrak{p}!}(-1)^{\ell_\mathfrak{p}}e_\mathfrak{p} \tag{1.16}$$

Ces formules seront utilisées dans la preuve de l'analogue multisymétrique du théorème fondamental des polynômes symétriques (1.19).

Nous présentons maintenant une autre formule obtenue par polarisation. Utilisée de façon répétée, elle permet d'exprimer toute fonction monomiale en fonction des polynômes multisymétriques élémentaires et des fonctions monomiales $m_{\mathfrak{p}}$, pour $\mathfrak{p}$ avec toutes ses parts de norme au plus n, ceci dès que $n!$ est inversible dans l'anneau de base.

Théorème 1.9 (formule de réduction)
Soit une partition de vecteur $\mathfrak{p}$ de longueur au plus n. Elle peut donc s'écrire $\mathfrak{p} = [\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}, \dots, \gamma^{(z)}]$ pour des $\gamma^{(x)}$ dans $\mathbb{N}^r$. Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^r$ notons $\mathfrak{p}(\beta) = [\gamma^{(a)} + \beta, \gamma^{(b)}, \dots, \gamma^{(z)}]$. Soit $\omega \in \mathbb{N}^r$ avec $|\omega| = n$. Dans $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Z})$ on a, si $\gamma^{(a)} \neq \mathbf{0}$:

$$\binom{|\omega|}{\omega}\mu_{\mathfrak{p}(\omega)}! m_{\mathfrak{p}(\omega)} + \sum_{\substack{\alpha+\beta=\omega \\ \alpha\neq\mathbf{0}}} (-1)^{|\alpha|} e_\alpha \binom{|\beta|}{\beta} \mu_{\mathfrak{p}(\beta)}! m_{\mathfrak{p}(\beta)} = 0$$

et si $\gamma^{(a)} = 0$:

$$\binom{|\omega|}{\omega}\mu_{\mathfrak{p}(\omega)}! m_{\mathfrak{p}(\omega)} + \sum_{\substack{\alpha+\beta=\omega \\ \alpha\neq\mathbf{0},\beta\neq\mathbf{0}}} (-1)^{|\alpha|} e_\alpha \binom{|\beta|}{\beta} \mu_{\mathfrak{p}(\beta)}! m_{\mathfrak{p}(\beta)} + (n-\ell_{\mathfrak{p}})(-1)^{|\omega|} e_\omega \mu_{\mathfrak{p}}! m_{\mathfrak{p}} = 0$$

Preuve : Dans $\mathbb{Z}[a, b, \dots, z]$ on a :

$$\sum_{i+j=n} (-1)^i e_i a^j = 0$$

Soit $\omega \in \mathbb{N}^r$ avec $|\omega| = n$. Appliquons l'opérateur d'ω-polarisation (section 1.2.3), il vient :

$$\sum_{\alpha+\beta=\omega} (-1)^{|\alpha|} e_\alpha \binom{|\beta|}{\beta} \boldsymbol{a}^\beta = 0$$

Multiplions par $\boldsymbol{a}^{u(a)} \boldsymbol{b}^{u(b)} \cdots \boldsymbol{z}^{u(z)}$ puis faisons la somme des expressions obtenues en appliquant toutes les permutations éléments de $\mathfrak{S}_{\{a,b,\dots,z\}}$. On obtient :

$$\sum_{\alpha+\beta=\omega} (-1)^{|\alpha|} e_\alpha \binom{|\beta|}{\beta} (n-\ell_{\mathfrak{p}(\beta)})! \mu_{\mathfrak{p}(\beta)}! m_{\mathfrak{p}(\beta)} = 0$$

Si $\gamma^{(a)} \neq \mathbf{0}$ alors tous les $\ell_{\mathfrak{p}(\beta)}$ sont égaux à $\ell_{\mathfrak{p}}$ et l'expression se simplifie par $(n-\ell_{\mathfrak{p}})!$. Si $\gamma^{(a)} = \mathbf{0}$ alors tous les $\ell_{\mathfrak{p}_\beta}$ sont égaux à $\ell_{\mathfrak{p}} + 1$, sauf celui correspondant à $\beta = \mathbf{0}$. L'expression se simplifie par $(n-1-\ell_{\mathfrak{p}})!$ et il reste $(n-\ell_{\mathfrak{p}})$ en facteur du terme correspondant à $\beta = \mathbf{0}$. ■

Cette formule de réduction sera utilisée dans la preuve de la proposition 3.8 (une reformulation de la conjecture de Foulkes-Howe), ainsi que dans la preuve de l'analogue multisymétrique du théorème fondamental des polynômes symétriques (théorème 1.19), *via* le corollaire qui suit, obtenu en appliquant la formule de réduction avec $\gamma^{(b)} = \ldots = \gamma^{(z)} = \mathbf{0}$:

Corollaire 1.10 *Soient $\gamma, \omega \in \mathbb{N}^r$ avec $|\omega| = n$ et γ non-nul. Dans $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Z})$ on a :*

$$\binom{|\omega|}{\omega} p_{\omega+\gamma} + \sum_{\substack{\alpha+\beta=\omega \\ \alpha\neq 0}} (-1)^{|\alpha|} e_\alpha \binom{|\beta|}{\beta} p_{\beta+\gamma} = 0$$

Dès lors que $n!$ est inversible dans l'anneau des coefficients, la formule (1.16) permettait déjà d'exprimer les premières sommes de puissances multisymétriques p_α ($|\alpha| \leq n$) comme polynômes en les élémentaires. En utilisant de façon répétée ce corollaire 1.10, on peut aussi exprimer toutes les sommes de puissances multisymétriques comme polynômes en les élémentaires.

▷ **Exemple :** Dans $\mathfrak{I}_2^2(\mathbb{Q})$ la formule de conversion (1.16) pour exprimer $p_{2,2}$ en fonction des polynômes multisymétriques élémentaires donne :

$$\begin{aligned} p_{2,2} = \frac{2}{3} e_{2,0}\, e_{0,2} - \frac{2}{3} e_{2,0} {e_{0,1}}^2 + \frac{1}{3} {e_{1,1}}^2 \\ - \frac{4}{3} e_{1,1} e_{1,0}\, e_{0,1} - \frac{2}{3} e_{0,2} {e_{1,0}}^2 + {e_{1,0}}^2 {e_{0,1}}^2 \end{aligned}$$

Cette formule ne reste valable que dans les $\mathfrak{I}_2^2(A)$ pour A anneau dans lequel 3 est inversible.

À l'inverse, utilisant le corollaire 1.10 avec $\omega = (2,0)$ et $\gamma = (0,2)$:

$$p_{2,2} - e_{2,0} p_{0,2} + e_{1,0} p_{1,2} = 0$$

On isole $p_{2,2}$ et on remplace $p_{1,2}$ et $p_{0,2}$ par leurs expressions obtenues via (1.16), il vient :

$$p_{2,2} = -2 e_{2,0} e_{0,2} + e_{2,0} {e_{0,1}}^2 + e_{1,1} e_{1,0} e_{0,1} + e_{0,2} {e_{1,0}}^2 - {e_{1,0}}^2 {e_{0,1}}^2$$

Cette dernière formule reste vraie pour tout anneau de base A. ◁

Nous en restons-là pour l'obtention de formules de conversion par polarisation. Les formules "m en p" et "m en e" se polarisent mal : le polarisé d'une fonction symétrique monomiale n'est pas une fonction multisymétrique monomiale, mais une combinaison linéaire de fonctions multisymétriques monomiales.

Dans la suite nous donnons d'autres méthodes de conversion.

1.3.2 La formule du produit et la formule de conversion "e en m"

Dans le cas des fonctions symétriques, la formule permettant d'exprimer les fonctions e en termes des fonctions m est donnée par des formules d'énumération de certaines matrices à coefficients entiers. Dans le paragraphe qui suit nous présentons la généralisation naturelle de cette formule.

Elle utilise comme lemme une formule donnant le produit des fonctions multisymétriques monomiales.

Proposition 1.11 (La formule du produit de fonctions monomiales).
Soient des partitions de vecteur $\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_k$. Alors :

$$m_{\mathfrak{p}_1} \cdot m_{\mathfrak{p}_2} \cdots m_{\mathfrak{p}_k} = \sum_{\mathfrak{q}} c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k; \mathfrak{q}) m_{\mathfrak{q}}$$

où le coefficient $c(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k; \mathfrak{q})$ est défini ainsi : on fixe arbitrairement $\boldsymbol{\beta} = (\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(\ell)})$ une suite de vecteurs telle que $[\boldsymbol{\beta}] = \mathfrak{q}$ et que ℓ soit plus grand que la plus grande des longueurs des $\mathfrak{p}_i$. Alors le coefficient considéré est le nombre de décompositions :

$$\begin{pmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \\ \vdots \\ \beta^{(\ell)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{(1,1)} \\ \alpha^{(1,2)} \\ \vdots \\ \alpha^{(1,\ell)} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} \alpha^{(k,1)} \\ \alpha^{(k,2)} \\ \vdots \\ \alpha^{(k,\ell)} \end{pmatrix}$$

où pour chaque i, la suite de vecteurs $(\alpha^{(i,1)}, \ldots, \alpha^{(i,\ell)})$ vérifie :

$$[(\alpha^{(i,1)}, \ldots, \alpha^{(i,\ell)})] = \mathfrak{p}_i$$

Avant la preuve nous donnons un exemple :

▷ **Exemple :** Soit $\alpha \in \mathbb{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$. Alors $p_\alpha^2 = p_{2\alpha} + 2m_{[\alpha,\alpha]}$, autrement dit $m_{[\alpha,\mathbf{0}]}m_{[\alpha,\mathbf{0}]} = m_{[2\alpha,\mathbf{0}]} + 2m_{[\alpha,\alpha]}$. En effet :

$$\begin{pmatrix} 2\alpha \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

(une seule décomposition, d'où le coefficient 1 de $m_{[2\alpha,\mathbf{0}]}$) et

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

(deux décompositions, d'où le coefficient 2 de $m_{[\alpha,\alpha]}$) ◁

Preuve : Rappelons que pour une partition de vecteur $\mathfrak{p}$ on a :

$$m_{\mathfrak{p}} = \sum_{[\alpha^{(a)},\alpha^{(b)},\ldots,\alpha^{(z)}]=\mathfrak{p}} \boldsymbol{a}^{\alpha^{(a)}} \boldsymbol{b}^{\alpha^{(b)}} \cdots \boldsymbol{z}^{\alpha^{(z)}}$$

Soient des partitions de vecteur $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\ldots$, $\mathfrak{p}_k$. Alors :

$$\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_k = \sum \prod_{x \in \{a,b,\ldots,z\}} \boldsymbol{x}^{\alpha^{(1,x)}+\alpha^{(2,x)}+\ldots+\alpha^{(k,x)}}$$

la somme étant étendue aux k-uplets de suites $(\alpha^{(i,a)}, \ldots, \alpha^{(i,z)})$ pour $i = 1, \ldots, n$ avec $[(\alpha^{(i,a)}, \ldots, \alpha^{(i,z)})] = \mathfrak{p}_i$. On en déduit le résultat énoncé dans la proposition. ■

Rappelons que nous notons $\xi_1, \ldots, \xi_r$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{Z}^r$. Nous appellerons matrice $0 - \xi$ une matrice dont chaque coefficient est soit le vecteur nul, soit un ξ_i.

Définition 1.12 *Soient deux partitions de vecteur de $\mathbb{N}^r$, :*

$$\mathfrak{p} = [\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)}], \qquad \mathfrak{q} = [\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(\ell)}]$$

Soit $\zeta(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ le nombre de matrices $0-\xi$ à k lignes et ℓ colonnes telles que la somme des vecteurs-coefficients de la i-ième ligne (resp. j-ième colonne) soit le vecteur $\alpha^{(i)}$ (resp. $\beta^{(j)}$). On appellera ce nombre le nombre d'incidences *de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$.*

Autrement dit c'est le nombre de tableaux :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|cc}
\hline
\bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \rightarrow & \alpha^{(1)} \\
\hline
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
\bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \rightarrow & \alpha^{(k)} \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & & \\
\multicolumn{1}{c}{\beta^{(1)}} & \multicolumn{1}{c}{\beta^{(2)}} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\beta^{(\ell)}} & &
\end{array}$$

où les $\bullet$ sont des vecteurs ξ_i ou $\mathbf{0}$.

Alors de la proposition précédente 1.11 on tire :

Proposition 1.12 *Soit $\mathfrak{p}$ une partition de vecteur de $\mathbb{N}^r$ dont toutes les parts sont de norme au plus n. On a, dans $\mathfrak{J}_n^r(\mathbb{Z})$:*

$$e_{\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{q}} \zeta(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) m_{\mathfrak{q}}$$

où la somme est étendue aux $\mathfrak{q}$ qui sont partitions de vecteur de $\mathbb{N}^r$ de longueur au plus n.

Preuve : C'est immédiat à partir de la proposition précédente et de la remarque que $e_\alpha = m_{[\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_r^{\alpha_r}]}$. ■

▷ **Exemple :** On se place dans $\mathfrak{I}_n^2(\mathbb{Z})$ avec $n \geq 4$. Exprimons $e_{1,1}^2$ dans la base des fonctions monomiales. Les fonctions monomiales de multidegré $(2,2)$ sont :

$$\begin{array}{cccc} m_{[(2,2)]}, & m_{[(2,1)(0,1)]}, & m_{[(1,2)(1,0)]}, & m_{[(1,1)^2]}, \\ m_{[(1,1)(1,0)(0,1)]}, & m_{[(1,0)^2(0,1)^2]}, & m_{[(2,0),(0,1)^2]}, & m_{[(1,0)^2(0,2)]} \end{array}$$

Le problème de remplissage :

$$\begin{array}{cccc|l} \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c|}{\ } & \multicolumn{1}{c|}{\ } & \ & \rightarrow \ \xi_1+\xi_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c|}{\ } & \multicolumn{1}{c|}{\ } & \ & \rightarrow \ \xi_1+\xi_2 \\ \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \xi_1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_2 & \end{array}$$

a quatre solutions :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \xi_1 & \mathbf{0} & \xi_2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \xi_1 & \mathbf{0} & \xi_2 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{0} & \xi_1 & \mathbf{0} & \xi_2 \\ \hline \xi_1 & \mathbf{0} & \xi_2 & \mathbf{0} \\ \hline \end{array}$$

et

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{0} & \xi_1 & \xi_2 & \mathbf{0} \\ \hline \xi_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \xi_2 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \xi_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \xi_2 \\ \hline \mathbf{0} & \xi_1 & \xi_2 & \mathbf{0} \\ \hline \end{array}$$

donc $\zeta\left([(1,1)^2]; [(1,0)^2(0,1)^2]\right) = 4$.

Le problème de remplissage :

$$\begin{array}{ccc|l} \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c|}{\ } & \ & \rightarrow \ \xi_1+\xi_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \multicolumn{1}{c|}{\ } & \ & \rightarrow \ \xi_1+\xi_2 \\ \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \xi_1 & \xi_1 & \xi_2 & \\ + & & & \\ \xi_2 & & & \end{array}$$

a deux solutions :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \xi_1 & \mathbf{0} & \xi_2 \\ \hline \xi_2 & \xi_1 & \mathbf{0} \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \xi_2 & \xi_1 & \mathbf{0} \\ \hline \xi_1 & \mathbf{0} & \xi_2 \\ \hline \end{array}$$

donc $\zeta\left([(1,1)^2]; [(1,1)(1,0)(0,1)]\right) = 2$.

Le problème de remplissage :

$$\begin{array}{cc|l} \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \ & \rightarrow \ \xi_1+\xi_2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } & \ & \rightarrow \ \xi_1+\xi_2 \\ \hline \downarrow & \downarrow & \\ \xi_1 & \xi_1 & \\ + & + & \\ \xi_2 & \xi_2 & \end{array}$$

a deux solutions :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \xi_1 & \xi_2 \\ \hline \xi_2 & \xi_1 \\ \hline \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline \xi_2 & \xi_1 \\ \hline \xi_1 & \xi_2 \\ \hline \end{array}$$

donc $\zeta\left([(1,1)^2];[(1,1)^2]\right) = 2$.

Le problème de remplissage :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \to \ \xi_1+\xi_2 \\ \to \ \xi_1+\xi_2 \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2\xi_1 & \xi_2 & \xi_2 \end{array}$$

a deux solutions :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \xi_1 & \mathbf{0} & \xi_2 \\ \hline \xi_1 & \xi_2 & \mathbf{0} \\ \hline \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \xi_1 & \xi_2 & \mathbf{0} \\ \hline \xi_1 & \mathbf{0} & \xi_2 \\ \hline \end{array}$$

donc $\zeta\left([(1,1)^2];[(2,0)(0,1)^2]\right) = 2$. De même $\zeta\left([(1,1)^2];[(1,0)^2(0,2)]\right) = 2$

Enfin, le problème de remplissage :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \to \ \xi_1+\xi_2 \\ \to \ \xi_1+\xi_2 \end{array}$$
$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 2\xi_1 & 2\xi_2 \end{array}$$

a une seule solution :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \xi_1 & \xi_2 \\ \hline \xi_1 & \xi_2 \\ \hline \end{array}$$

donc $\zeta\left([(1,1)^2];[(2,0)(0,2)]\right) = 1$.

Les trois autres problèmes de remplissages n'ont pas de solution :

$$\zeta\left([(1,1)^2];[(2,2)]\right) = \zeta\left([(1,1)^2];[(2,1)(0,1)]\right) = \zeta\left([(1,1)^2];[(1,2)(1,0)]\right) = 0$$

Par suite :

$$\begin{aligned} e_{1,1}^2 = m_{[(2,0)(0,2)]} + 2\,m_{[(2,0)(0,1)^2]} \\ + 2\,m_{[(1,0)^2(0,2)]} + 2\,m_{[(1,1)^2]} \\ + 2\,m_{[(1,1)(1,0)(0,1)]} + 4\,m_{[(1,0)^2(0,1)^2]} \end{aligned}$$

$\triangleleft$

1.3.3 Formules à la Doubilet

Dans [24], Peter Doubilet a présenté une approche de la théorie des fonctions symétriques qui repose sur l'étude du treillis des partitions d'un ensemble fini et de l'inversion de Möbius dans ce treillis (voir [66] ou [7] pour plus sur ces objets).

Cette approche permet de donner des formules explicites pour exprimer la plupart des bases de l'espace vectoriel des fonctions symétriques les unes en fonction des autres. En particulier, elle donne des formules explicites pour exprimer les fonctions monomiales en termes des sommes de puissances et des polynômes élémentaires, qui n'étaient pas obtenues autrement. Dans [65], Mercedes Rosas a montré que la même approche convient aussi pour les polynômes multisymétriques. Nous présentons cette méthode et les formules ainsi obtenues.

Soit un ensemble partiellement ordonné $(S, \leq)$. Un *segment* $[\Sigma, \Pi]$ est un sous-ensemble de la forme $\{\Theta \,|\, \Sigma \leq \Theta \leq \Pi\}$. On peut considérer les fonctions f de $S \times S$ dans $\mathbb{Z}$ avec la propriété que $f(\Sigma, \Pi) = 0$ si $\Sigma \not\leq \Pi$. Si tous les segments de S sont finis, alors on peut considérer le produit $*$ sur l'ensemble de ces fonctions :

$$(f * g)(\Sigma, \Pi) = \sum_{\Theta} f(\Sigma, \Theta) g(\Theta, \Pi)$$

Il est associatif et admet un neutre bilatère, la fonction définie par :

$$(\Sigma, \Pi) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \Sigma = \Pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une fonction remarquable est la *fonction d'incidence* :

$$(\Sigma, \Pi) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \Sigma \leq \Pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre que la fonction d'incidence est inversible. Son inverse est la *fonction de Möbius* $\boldsymbol{\mu}$ de l'ensemble partiellement ordonné. Sa propriété caractéristique est donc :

$$\forall \Sigma, \Pi, \qquad \sum_{\Sigma \leq \Theta \leq \Pi} \boldsymbol{\mu}(\Theta, \Pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Sigma = \Pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous considérons un ensemble partiellement ordonné particulier. Soit k un entier positif.

Définition 1.13 *Une* partition Π *de* $\{1, \ldots, k\}$ *est une famille de sous-ensembles* $\Pi_1, \ldots, \Pi_\ell$ *non-vides, appelés* blocs, *deux-à-deux disjoints et dont l'union est* $\{1, \ldots, k\}$. *Nous noterons* Part_k *l'ensemble des partitions de* $\{1, \ldots, k\}$.

L'ensemble Part_k est ordonné en disant que $\Sigma \leq \Pi$ ("Σ raffine Π") si chaque bloc de Σ est contenu dans un bloc de Π. Il est muni d'une structure de treillis : chaque paire de partitions $\{\Sigma, \Pi\}$ admet une borne inférieure (nous la noterons $\Sigma \wedge \Pi$), et une borne supérieure ($\Sigma \vee \Pi$). La borne inférieure est la partition dont les blocs sont les intersections non-vides d'un bloc de Σ avec un bloc de Π. La borne supérieure a pour blocs les classes d'équivalence pour la relation : $a \sim b$ si et seulement si il existe $c_0, c_1, \ldots, c_j$ avec $c_0 = a, c_j = b$ et pour tout i, il existe un bloc de Σ ou de Π qui contient à la fois a_{i-1} et a_i.

Ce treillis des partitions a comme plus petit élément (noté $\hat{\mathbf{0}}$) la partition constituée de k singletons et comme plus grand élément la partition en un seul bloc.

Si $\Sigma \leq \Pi$ alors le segment $[\Sigma, \Pi]$ est isomorphe, comme ensemble ordonné, au produit direct de α_1 copies de Part_1, α_2 copies de Part_2, ..., où α_i est le nombre de blocs de Π qui sont réunions de i blocs de Σ. Dans ce cas, $\boldsymbol{\mu}(\Sigma, \Pi) = (-1)^{k+1}(0!)^{\alpha_1}(1!)^{\alpha_2}(2!)^{\alpha_3}\cdots((k-1)!)^{\alpha_k}$.

Passons à la construction de Doubilet. À $\Pi = \{\Pi_1, \ldots, \Pi_\ell\} \in \mathrm{Part}_k$ est associée $\mathfrak{p}_\Pi$, la partition du vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$ dont les parts sont les vecteurs caractéristiques des Π_i :

$$\mathfrak{p}_\Pi = [\chi(\Pi_1), \ldots, \chi(\Pi_\ell)]$$

(le vecteur caractéristique de $T \subset \{1, \ldots, k\}$ est la suite $\chi(T) = (\chi_1, \ldots, \chi_r)$ avec $\chi_i = 1$ si $i \in T$ et 0 sinon).

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\{1, \ldots, k\}$ dans l'alphabet $\{a, b, \ldots, z\}$. Soit $f \in \mathcal{F}$. Elle définit une relation d'équivalence sur $\{1, \ldots, k\}$:

$$i \sim j \Leftrightarrow f(i) = f(j)$$

Les classes d'équivalence forment une partition de $\{1, \ldots, k\}$ appelée le *noyau* de f et notée $\ker f$.

À chaque $f \in \mathcal{F}$ est associée sa fonction génératrice :

$$\mathrm{Gen}(f) = f(1)_1\, f(2)_2 \cdots f(k)_k$$

C'est un monôme en les variables $a_1, a_2, \ldots, z_r$. À une partie T de $\mathcal{F}$ on associe aussi une fonction génératrice :

$$\mathrm{Gen}(T) = \sum_{f \in T} \mathrm{Gen}(f)$$

Pour $\Pi \in \mathrm{Part}_k$ on définit :

$$\mathcal{M}_\Pi = \{f \in \mathcal{F} \mid \ker f = \Pi\}$$

$$\mathcal{P}_\Pi = \{f \in \mathcal{F} \mid \ker f \geq \Pi\}$$

$$\mathcal{E}_\Pi = \{f \in \mathcal{F} \mid \ker f \wedge \Pi = \hat{0}\}$$

Alors :

Proposition 1.13 *Les polynômes* $\mathrm{Gen}(\mathcal{M}_\Pi), \mathrm{Gen}(\mathcal{P}_\Pi)$ *et* $\mathrm{Gen}(\mathcal{E}_\Pi)$ *sont dans la composante de multidegré* $(1, 1, \ldots, 1)$ *de* $\mathfrak{I}_n^k(\mathbb{Z})$*. Précisément on a :*

$$\mathrm{Gen}(\mathcal{M}_\Pi) = m_{\mathfrak{p}_\Pi}, \quad \mathrm{Gen}(\mathcal{P}_\Pi) = p_{\mathfrak{p}_\Pi}, \quad \mathrm{Gen}(\mathcal{E}_\Pi) = e_{\mathfrak{p}_\Pi}$$

En considérant les relations d'inclusion entre les ensembles de la forme $\mathcal{M}_\Pi, \mathcal{P}_\Pi$ et $\mathcal{E}_\Pi$, Doubilet (dans le cas des polynômes symétriques) et Rosas (vérifiant que les résultats restent valables pour les polynômes multisymétriques) montrent qu'on a les formules suivantes :

Théorème 1.14

$$p_{\mathfrak{p}_\Pi} = \sum_{\Sigma \geq \Pi} m_{\mathfrak{p}_\Sigma}$$

$$m_{\mathfrak{p}_\Pi} = \sum_{\Sigma \geq \Pi} \boldsymbol{\mu}(\Pi, \Sigma) p_{\mathfrak{p}_\Sigma}$$

$$e_{\mathfrak{p}_\Pi} = \sum_{\Sigma \,:\, \Sigma \wedge \Pi = \hat{\mathbf{0}}} m_{\mathfrak{p}_\Sigma}$$

$$m_{\mathfrak{p}_\Pi} = \sum_{\Sigma} \left(\sum_{\Theta \geq \Sigma \vee \Pi} \frac{\boldsymbol{\mu}(\Pi, \Theta) \boldsymbol{\mu}(\Sigma, \Theta)}{\boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{0}}, \Theta)} \right) e_{\mathfrak{p}_\Sigma}$$

$$e_{\mathfrak{p}_\Pi} = \sum_{\Sigma \leq \Pi} \boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{0}}, \Sigma) p_{\mathfrak{p}_\Sigma}$$

$$p_{\mathfrak{p}_\Pi} = \frac{1}{\boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{0}}, \Pi)} \sum_{\Sigma \leq \Pi} \boldsymbol{\mu}(\Sigma, \Pi) e_{\mathfrak{p}_\Sigma}$$

Pour obtenir des formules valables en tout multidegré on procède comme suit. Soit un multidegré $\alpha \in \mathbb{N}^r$, et soit $k = |\alpha|$. On lui associe l'application g_α de $\{1, \ldots, k\}$ dans $\{1, \ldots, r\}$ définie de la façon suivante : g_α envoie les α_1 premiers éléments de $\{1, \ldots, k\}$ sur 1, puis les α_2 éléments suivants sur 2, et ainsi de suite, jusqu'aux α_r derniers éléments envoyés sur r. On en déduit une application polynomiale : celle qui envoie x_i sur $x_{g_\alpha(i)}$, pour toute lettre x parmi $a, b, \ldots, z$ et tout indice i dans $\{1, \ldots, k\}$. Cette application polynomiale envoie $\mathfrak{I}_n^k(\mathbb{Z})$ dans $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Z})$. Elle envoie en particulier $\mathfrak{I}_n^k(\mathbb{Z})_{\mathrm{mdeg}=(1,1,\ldots,1)}$ dans $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Z})_{\mathrm{mdeg}=\alpha}$. Notons $g_{\alpha\,*}$ le morphisme induit entre ces derniers $\mathbb{Z}$-modules.

Introduisons encore quelques notations supplémentaires : soit une partition du vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$, elle s'écrit $\mathfrak{p} = [\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\ell)}]$. Nous posons $g_{\alpha\,*}(\mathfrak{p}) = [\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(\ell)}]$ où $\beta_i^{(j)} = \sum_{g_\alpha(t)=i} \alpha_t^{(j)}$ (autrement dit on regroupe les coordonnées dont les indices ont la même image par g, en faisant leur somme). Pour une partition de vecteur $\mathfrak{q} = [\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(s)}]$ nous notons aussi $\tilde{\mu}(\mathfrak{q})! = \prod_{i,j} (\beta_j^{(i)})!$. Alors Mercedes Rosas montre que :

Proposition 1.15 *Si* $\mathfrak{q} = g_{\alpha\,*}(\mathfrak{p})$ *alors :*

$$g_{\alpha\,*}(m_{\mathfrak{p}}) = \mu_{\mathfrak{q}}!\, m_{\mathfrak{q}}$$

$$g_{\alpha\,*}(p_{\mathfrak{p}}) = p_{\mathfrak{q}}$$

$$g_{\alpha\,*}(e_{\mathfrak{p}}) = \tilde{\mu}_{\mathfrak{q}}!\, e_{\mathfrak{q}}$$

Preuve : Voir [65] ■

Dans ces formules, tous les coefficients $\mu_{\mathfrak{q}}!$ et $\tilde{\mu}_{\mathfrak{q}}!$ qui apparaissent sont des produits de nombres inférieurs ou égaux à n. Ils sont donc inversibles dès que $n!$ est inversible.

D'autre part, il est facile de constater que toute partition $\mathfrak{q}$ du vecteur α est de la forme $g_{\alpha\,*}(\mathfrak{p})$ pour une partition $\mathfrak{p}$ du vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$:

Par conséquent on a :

Corollaire 1.16 *Soit A un anneau dans lequel $n!$ est inversible. Alors l'application $g_{\alpha\,*}$ de $\mathfrak{I}_n^k(A)_{\mathrm{mdeg}=(1,1,\ldots,1)}$ dans $\mathfrak{I}_n^r(A)_{\mathrm{mdeg}=\alpha}$ est surjective.*

1.3.4 Polynômes multisymétriques et permanent

Pour terminer le formulaire, nous remarquons que les formules entre polynômes multisymétriques se traduisent dans la théorie des permanents. À titre d'illustration, nous tirons d'une identité connue de la théorie des permanents une nouvelle identité entre polynômes multisymétriques. Un ouvrage de référence sur la théorie des permanents est celui de Minc [54].

Commençons par rappeler la définition du permanent d'une matrice.

Soit une matrice à r lignes et n colonnes. Nous pouvons choisir n lettres distinctes $a, b, \ldots z$ et la noter :

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & z_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_r & b_r & \ldots & z_r \end{pmatrix}$$

Définition 1.14 *Le permanent de* $\mathbb{X}$ *est :*

$$\operatorname{per} \mathbb{X} = \sum_i i(1)_1 i(2)_2 \cdots i(r)_r$$

la somme étant étendue à toutes les injections $i : \{1, \cdots, r\} \to \{a, b, \cdots, z\}$.

En particulier, si $r > n$ alors le permanent est nul.

Par la notation $\mathbb{X}[1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \cdots r^{\nu_r}|-]$ on désigne la matrice constituée de ν_1 répétitions de la première ligne de $\mathbb{X}$, de ν_2 répétitions de la deuxième ligne, *etc.*.. Alors la remarque fondamentale, liant permanent et polynômes multisymétriques élémentaires des coefficients de la matrice $\mathbb{X}$, est la suivante :

$$\operatorname{per} \mathbb{X}[1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \cdots r^{\nu_r}|-] = \nu! e_\nu \tag{1.17}$$

En particulier :

$$\operatorname{per}\mathbb{X} = e_{1,1,\ldots,1} \tag{1.18}$$

Ainsi, la formule exprimant le polynôme multisymétrique élémentaire $e_{1,1,\ldots,1}$ donnée dans le théorème 1.14 :

$$e_{1,1,\ldots,1} = \sum_{\Sigma} \boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{0}}, \Sigma) p_{\mathfrak{p}_\Sigma}$$

(où la somme est étendue à toutes les partitions de $\{1, \ldots, r\}$) devient l'*identité de Binet-Minc* :

$$\operatorname{per}\mathbb{X} = \sum_{\Sigma=\{\Sigma_1,\ldots,\Sigma_\ell\}} \boldsymbol{\mu}(\hat{\mathbf{0}}, \Sigma) \prod_{j=1}^{\ell} \prod_{x\in\{a,\ldots,z\}} \sum_{i\in\Sigma_j} x_i$$

Nous nous intéressons à une autre formule de la thérie des permanents : la *formule de Joachimstal-Minc*. Elle s'énonce ainsi (en utilisant les notations des polynômes multisymétriques) :

Proposition 1.17 *(*formule de Joachimstal-Minc*)*

$$e_{1,1,\ldots,1} = \operatorname{per}\mathbb{X} = \sum_{S\sqcup T=\{2,\ldots,r\}} (-1)^{(\#T)} \#T! e_{\chi(S)} p_{\chi(T\sqcup\{1\})}$$

où $\sqcup$ *signifie* union disjointe.

En effectuant une spécialisation comme dans la proposition 1.15 on obtient une identité plus générale :

Proposition 1.18 *Soit* $\omega \in \mathbb{N}^r$*. Alors :*

$$(\omega_1 + 1) \cdot e_{\omega+\xi_1} = \sum_{\alpha+\beta=\omega} (-1)^{|\beta|} \binom{|\beta|}{\beta} e_\alpha p_{\beta+\xi_1}$$

Inversement, on ré-obtient la formule de Joachimstal-Minc en prenant $\omega = \xi_2 + \ldots + \xi_{r-1} + \xi_r$ dans la formule de la proposition 1.18.

La preuve, avec les outils de la théorie des polynômes multisymétriques, de la proposition 1.18, est très simple :

Preuve : On part de l'identité (1.13), que nous redonnons :

$$\sum_{\alpha} e_\alpha \mathbf{t}^\alpha = E(\mathbf{t}) = \exp\left(\sum_{\beta\neq\mathbf{0}} (-1)^{|\beta|-1} \frac{1}{|\beta|} \binom{|\beta|}{\beta} p_\beta \mathbf{t}^\beta\right)$$

On lui applique $\frac{\partial}{\partial t_1}$ puis on sélectionne le coefficient de $\mathbf{t}^\omega$. ■

▷ **Exemple :** Comparons les identités de Newton-Joachimstal-Minc aux identités de Newton multisymétriques sur un exemple : $\omega = (2, 1)$. Les identités de Newton multisymétriques donnent :

$$3e_{21} = e_{20}p_{01} + e_{11}p_{10} - 2e_{10}p_{11} - e_{01}p_{20} + 3p_{21}$$

et la formule déduite de celle de Joachimstal-Minc :

$$e_{21} = e_{20}p_{01} - e_{10}p_{11} + p_{21}$$

Elle permet d'exprimer $e_{2,1}$ en fonction des autres polynômes multisymétriques, même lorsque 3 n'est pas inversible dans l'anneau de base. ◁

Notes

- Les identités de Newton multisymétriques sont bien connues de MacMahon (Art. 537 de [52]) et Junker (formule (7) dans [44]).
- La formule de réduction (proposition 1.9) nous a été suggérée par Nicolas Thiéry [82]).
- La formule du produit de fonctions monomiales (proposition 1.11) est due à Fleischmann [27]. En fait, il donne une formule plus générale valable pour d'autres groupes de permutations.
- La formule "e en m" de la proposition 1.12 est connue de MacMahon, qui l'utilise pour dénombrer les "rectangles latins" ([52], ch. V, *Further theory of the latin square*). Cette application des polynômes multisymétriques, et d'autres applications, à des problèmes d'énumération, est présentée dans [31].
- La formule de Binet-Minc apparaît sans démonstration pour $r = 2, 3, 4$ dans les travaux de Binet [8]. Elle a été démontrée par Henryk Minc ([55] ou [54], ch.1 et ch.7). La formulation en terme de fonction de Möbius est donnée par Crapo ([20]).
- La formule de Joachimstal-Minc est due à Henryk Minc [55, 54]. Elle est basée sur la preuve des formules de Binet par Joachimstal [40].
- Parmi les identités données dans cette section, la plupart donnent immédiatement des identités semblables dans l'algèbre de MacMahon $\mathfrak{M}^r$, simplement en remplaçant les e, p, m par les éléments analogues $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{m}$. C'est la cas des identités de Newton multisymétriques (proposition 1.12) et de ses corollaires, de la formule du produit (proposition 1.11), de la formule combinatoire "e en m" (proposition 1.12), des formules à la Doubilet et de la formule de Joachimstal-Minc. En revanche, la formule de réduction (proposition 1.9) et son corollaire, n'ont pas d'analogue dans $\mathfrak{M}^r$.

1.4 Quand les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent-ils l'algèbre des polynômes multisymétriques ?

Il est bien connu que tous les polynômes symétriques s'expriment comme polynômes en les élémentaires (résultat souvent appelé "théorème fondamental des polynômes symétriques").

Nous examinons l'énoncé analogue pour les polynômes multisymétriques : sont-ils tous des polynômes en les multisymétriques élémentaires ?

Le formulaire établi précedemment nous donne la réponse.

Théorème 1.19 *Soit A un anneau, et n et r des entiers positifs. Les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent l'algèbre $\mathfrak{J}_n^r(A)$ si et seulement si au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
(i) $n!$ est inversible dans A.
(ii) $(n, r) = (2, 2)$.
(iii) $(n, r) = (3, 2)$ et 3 est inversible dans A.
(iv) $r = 1$.

Preuve : Ce théorème va être démontré par des lemmes à suivre. D'abord, le lemme 1.20 montre que la condition (i) est suffisante pour que les polynômes multisymétriques engendrent l'algèbre $\mathfrak{J}_n^r(A)$.

Supposons maintenant que les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent $\mathfrak{J}_n^r(A)$, et qu'en même temps $n!$ ne soit pas inversible dans A. Donc il existe au moins un entier premier au plus égal à n et non inversible dans A. Soit k le plus petit tel entier. Si k est impair, le lemme 1.21 et le lemme 1.22 montrent qu'alors on est dans le cas $r = 1$ (condition (iv) vérifiée). Si $k = 2$, le lemme 1.21, le lemme 1.23 et le lemme 1.24 montrent qu'on est soit dans le cas $r = 1$, (condition (iv) vérifiée), soit dans le cas $(n, r) = (2, 2)$ (condition (ii) vérifiée), soit dans le cas $(n, r) = (3, 2)$. enfin le lemme 1.27 montre dans ce dernier cas, 3 doit être inversible dans A (donc condition (iii) vérifiée).

Ce même lemme 1.27 montre que la condition (iii) est suffisante pour que les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent $\mathfrak{J}_n^r(A)$. Le lemme 1.26 montre que la condition (ii) est aussi suffisante. Pour finir, le fait que (iv) est suffisante n'est autre que le théorème fondamental des polynômes symétriques. ∎

Lemme 1.20 *Soit A un anneau, et n et r des entiers positifs. Si $n!$ est inversible dans A alors les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent $\mathfrak{J}_n^r(A)$.*

Preuve : Supposons donc $n!$ inversible dans A.

Toutes les sommes de puissances s'expriment comme polynômes à coefficients dans A en les élémentaires : c'est une conséquence de la formule (1.16) et du corollaire 1.10 de la formule de réduction.

Par suite, il suffit de montrer que les sommes de puissances engendrent $\mathfrak{I}_n^r(A)$ (il s'agit ici de toutes les sommes de puissances, et plus seulement des premières).

Soit un multidegré $\alpha \in \mathbb{N}^r$ et soit $k=|\alpha|$. D'après la proposition 1.15 et son corollaire 1.16, il existe un morphisme de A-modules surjectif de $\mathfrak{I}_n^k(A)_{\mathrm{mdeg}=(1,1,\ldots,1)}$ sur $\mathfrak{I}_n^r(A)_{\mathrm{mdeg}=\alpha}$, qui envoie les produits de sommes de puissances sur des produits de sommes de puissances. Or d'après le théorème 1.14, tout élément de $\mathfrak{I}_n^k(A)_{\mathrm{mdeg}=(1,1,\ldots,1)}$ est polynôme à coefficients entiers en les sommes de puissances. Ainsi, tout élément homogène de multidegré α de $\mathfrak{I}_n^r(A)$ est polynôme à coefficients dans A en les sommes de puissances. Et ceci pour tout multidegré α. D'où le lemme. ∎

Lemme 1.21 *Soient des entiers positifs r, n. Soit A un anneau. Si les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent $\mathfrak{I}_{n+1}^r(A)$ ou $\mathfrak{I}_n^{r+1}(A)$, alors ils engendrent aussi $\mathfrak{I}_n^r(A)$.*

Preuve : Il existe un morphisme d'algèbres surjectif ρ_n^{n+1} de $\mathfrak{I}_{n+1}^r(A)$ sur $\mathfrak{I}_n^r(A)$, qui envoie les élémentaires de $\mathfrak{I}_{n+1}^r(A)$ sur des élémentaires de $\mathfrak{I}_n^r(A)$ (voir la formule (1.4)). Donc si les élémentaires engendrent $\mathfrak{I}_{n+1}^r(A)$, ils engendrent aussi $\mathfrak{I}_n^r(A)$.

Il existe aussi un morphisme d'algèbres surjectif de $\mathfrak{I}_n^{r+1}(A)$ dans $\mathfrak{I}_n^r(A)$, obtenu en annulant les variables $a_{r+1}, b_{r+1}, \ldots, z_{r+1}$. Il envoie les élémentaires de $\mathfrak{I}_n^{r+1}(A)$ sur zéro ou sur des élémentaires de $\mathfrak{I}_n^r(A)$. Donc si $\mathfrak{I}_n^{r+1}(A)$ est engendrée par les élémentaires, alors $\mathfrak{I}_n^r(A)$ est aussi engendrée par les élémentaires. ∎

Lemme 1.22 *Soit un entier impair $k > 2$. Soit A un anneau dans lequel k n'est pas inversible. Alors la fonction monomiale $m_{[(1,0)^{k-1}(0,2)]}$ n'est pas dans la sous-algèbre de $\mathfrak{I}_k^2(A)$ engendrée par les polynômes multisymétriques élémentaires.*

Preuve : Supposons que $m_{[(1,0)^{k-1}(0,2)]}$ est combinaison linéaire à coefficients dans A de produits $e_{\mathfrak{p}}$ de polynômes multisymétriques élémentaires.

Soit la projection de $\mathfrak{I}_k^2(A)$ dans $\mathfrak{I}_k^1(A)$ (un anneau de polynômes symétriques) obtenue en envoyant chacune des variables $a_2, b_2, \ldots, z_2$ sur 1. Elle envoie $m_{[(1,0)^{k-1}(0,2)]}$ sur e_{k-1}, et elle envoie chaque polynôme multisymétrique élémentaire $e_{i,j}$ sur un multiple entier de e_i. En particulier, les seuls $e_{\mathfrak{p}}$ dont l'image contribue à e_{k-1} sont :

$$e_{k-1,1}e_{0,1}, \qquad e_{k-1,0}e_{0,1}^2, \qquad e_{k-1,0}e_{0,2}$$

Ces images sont respectivement :

$$ke_{k-1}, \qquad k^2 e_{k-1}, \qquad \binom{k}{2} e_{k-1}$$

qui sont tous dans l'idéal de $\mathfrak{I}_k^1(A)$ engendré par l'entier k (puisque k est premier différent de 2, il est impair, donc le coefficient binomial $\binom{k}{2}$ est bien multiple de k). Par conséquent, 1 est dans l'idéal de A engendré par k, autrement dit k est inversible dans A. ■

Lemme 1.23 *Soit A un anneau dans lequel 2 n'est pas inversible. Alors la somme de puissances multisymétrique $p_{1,1,1}$ n'est pas dans la sous-algèbre de $\mathfrak{I}_2^3(A)$ engendrée par les polynômes multisymétriques élémentaires.*

Preuve : Supposons le contraire de l'énoncé, autrement dit que $p_{1,1,1}$ est combinaison linéaire à coefficients dans A de :

$$e_{1,0,0}e_{0,1,0}e_{0,0,1}, \quad e_{1,0,0}e_{0,1,1}, \quad e_{0,1,0}e_{1,0,1}, \quad e_{0,0,1}e_{1,1,0}$$

Considérons la projection de $\mathfrak{I}_2^3(A)$ dans $\mathfrak{I}_2^1(A)$ obtenue en remplaçant chacune des variables a_2, b_2, a_3, b_3 par 1. Elle envoie $p_{1,1,1}$ sur $p_1 = e_1$ et les monômes ci-dessus respectivement sur $4e_1$, $2e_1$, $2e_1$ et $2e_1$. Ceci implique que 2 doit être inversible dans A. ■

Lemme 1.24 *Soit A un anneau dans lequel 2 n'est pas inversible. Alors la fonction monomiale $m_{[(3,2)]}$ n'est pas dans la sous-algèbre de $\mathfrak{I}_4^2(A)$ engendrée par les polynômes multisymétriques ĺémentaires.*

Preuve : Considérons le morphisme d'algèbres de $\mathfrak{I}_4^2(A)$ dans $\mathfrak{I}_4^1(A)$, l'algebra des polynômes symétriques en les variables a_1, b_1, c_1, d_1, obtenu en laissant a_1, b_1, c_1, d_1 inchangés et en envoyant a_2, b_2, c_2, d_2 sur 1. Les images des polynômes multisymétriques élémentaires sont donnés par la table suivante :

$$\begin{array}{lllll}
 & e_{0,1} \mapsto 4 & e_{0,2} \mapsto 6 & e_{0,3} \mapsto 4 & e_{0,4} \mapsto 1 \\
e_{1,0} \mapsto e_1 & e_{1,1} \mapsto 3\,e_1 & e_{1,2} \mapsto 3\,e_1 & e_{1,3} \mapsto e_1 & \\
e_{2,0} \mapsto e_2 & e_{2,1} \mapsto 2e_2 & e_{2,2} \mapsto e_2 & & \\
e_{3,0} \mapsto e_3 & e_{3,1} \mapsto e_3 & & & \\
e_{4,0} \mapsto e_4 & & & &
\end{array}$$

L'image de $m_{[3,2]}$ est la somme de puissances $p_3 = a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 + d_1^3$. Son unique décomposition suivant les polynômes multisymétriques élémentaires est :

$$p_3 = 3\,e_3 - 3\,e_2\,e_1 + e_1^3$$

Supposons que $m_{[3,2]}$ est un polynôme en les polynômes multisymétriques élémentaires. Les euls monômes en les e_α dont la projection contribue à e_3 sont

$$e_{3,0}\, e_{0,1}^2, \quad e_{3,0}\, e_{0,2}, \quad e_{3,1}\, e_{0,1}$$

Mais leurs images exactes sont

$$16\, e_3, \quad 6\, e_3, \quad 4\, e_3$$

Ceci implique que le coefficient, 3, de e_3, est dans l'idéal engendré par 2 dans A, et donc que 2 est inversible dans A. ■

La question se pose, dans le cas "modulaire" ($n!$ non-inversible), de trouver un ensemble générateur fini de $\mathfrak{I}_n^r(A)$, puisque les élémentaires ne conviennent plus. Fleischmann [27] a démontré le résultat suivant, qui nous permettra d'achever la démonstration du thórème 1.19 (il reste à montrer que (ii) et (iii) sont chacunes des conditions suffisantes).

Lemme 1.25 *Les fonctions monomiales de multidegré dominé par* $(n-1, n-1, \ldots, n-1)$, *avec les polynômes multisymétriques élémentaires, engendrent* $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Z})$.

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^r$, on entend par *α est dominé par* $(n-1, n-1, \ldots, n-1)$ que pour tout i, on a $\alpha_i \leq n-1$.

Preuve : Nous présentons la preuve de Fleischmann, basée sur un algorithme de réduction.

Choisissons une coordonnée $i \in \{1, \ldots, r\}$. À chaque $\mathfrak{p}$ partition de vecteur de $\mathbb{N}^r$ on associe $\lambda(i; \mathfrak{p})$ la suite des i-ièmes coordonnées de ses parts rangées dans l'ordre décroissant. Par exemple, pour $\mathfrak{p} = [(3,1)(2,0)(1,1)]$ on aura $\lambda(2; \mathfrak{p}) = (1,1,0)$.

On définit un ordre partiel $\preceq_i$ sur l'ensemble des partitions de vecteur de $\mathbb{N}^r$ de longueur au plus n en décidant que $\mathfrak{p} \preceq_i \mathfrak{q}$ si et seulement si $\lambda(i; \mathfrak{p})$ est plus petit que $\lambda(i; \mathfrak{q})$ dans l'ordre lexicographique.

Soit $\mathfrak{p}$ une partition de vecteur, avec la somme des i-ièmes coordonnées de ses parts supérieure ou égale à n.

- Si $\lambda(i; \mathfrak{p}) = (t_1, t_2, \ldots, t_s, k, \ldots, k, 0, \ldots, 0)$ avec $t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_s > k > 0$, alors on pose $\mathfrak{r}$ la partition de vecteur obtenue de $\mathfrak{p}$ en remplaçant dans les i-ièmes coordonnées de ses parts chacun des t_j par $t_j - 1$.

  La formule du produit montre que :

  $$m_{\mathfrak{p}} = m_{\mathfrak{r}}\, e_{s\xi_i} - \sum m_{\mathfrak{q}}$$

  pour des partitions de vecteur $\mathfrak{q} \prec_i \mathfrak{p}$.

- Si $\lambda(i;\mathfrak{p}) = (k, k, \ldots, k, 0, \ldots, 0)$ avec s occurences de $k > 0$, alors on pose $\mathfrak{r}$ la partition de vecteur obtenue de $\mathfrak{p}$ en remplaçant dans les i-ièmes coordonnées de ses parts chacun des k par $k-1$. La formule du produit montre que :
$$m_{\mathfrak{p}} = m_{\mathfrak{r}}\, e_{s\xi_i} - \sum m_{\mathfrak{q}}$$
pour des partitions de vecteur $\mathfrak{q} \prec_i \mathfrak{p}$.
- Si $\lambda(i;\mathfrak{p}) = (1, 1, \ldots, 1)$ avec n occurences de 1, alors on a factorisation :
$$m_{\mathfrak{p}} = m_{\mathfrak{r}}\, e_{n\xi_i}$$
où $\mathfrak{r}$ est la partition de vecteur obtenue de $\mathfrak{p}$ en annulant les i-ièmes coordonnées de ses parts.

En appliquant ces trois types de réduction on exprime toute fonction monomiale de multidegré α comme polynôme, à coefficients entiers, en les fonctions monomiales de multidegrés β avec $\beta_i \leq n-1$, et β dominé par α, et les polynômes multisymétriques élémentaires.

Appliquant cette procédure successivement pour $i = 1$, puis $i = 2, \ldots$, $i = r$ on obtient une expression en terme des fonctions monomiales de multidegré dominé par $(n-1, n-1, \ldots, n-1)$, et les polynômes multisymétriques élémentaires. ■

Lemme 1.26 *Les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent l'anneau $\mathfrak{J}_2^2(\mathbb{Z})$.*

Preuve : D'après la proposition 1.25, il suffut de montrer que toute fonction monomiale de multidegré $(1,0), (0,1)$ ou $(1,1)$ est dans la sous-algèbre engendŕe par les polynômes multisymétriques élémentaires. Les polynômes multisymétriques élémentaires de multidegré $(1,0)$ (ou plus généralement de multidegré $(k,0)$ pour un $k \in \mathbb{N}$) sont en fait des polynômes symétriques en les variables a_1, b_1, et sont donc dans le sous-anneau engendré par les polynômes multisymétriques élémentaires en les variables a_1, b_2. Ces derniers sont aussi des polynômes multisymétriques élémentaires. Le même raisonnement peut être tenu pour les polynômes multisymétriques homogènes de multidegré $(0,k)$: ce sontd es polynômes symétriques en les variables a_2, b_2.

Il reste donc seulement à traiter le cas du multidegré $(1,1)$. Il n'y a que deux fonctions monomiales de multidegré $(1,1)$ dans $\mathfrak{J}_2^2$, à savoir $m_{[(1,1)]}$ et $m_{[(1,0),(0,1)]}$. Il est aisé de vérifier que :
$$\begin{array}{rcl} m_{[(1,1)]} & = & e_{1,0}e_{0,1} - e_{1,1} \\ m_{[(1,0),(0,1)]} & = & e_{1,1} \end{array}$$
ce qui démontre le lemme. ■

Lemme 1.27 *Soit A un anneau. Les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent l'algèbre $\mathfrak{J}_3^2(A)$ si et seulement si 3 est inversible dans A.*

Preuve : L'inversibilité de 3 est nécessaire d'après le lemme 1.22. Le reste de la preuve est donc consacré à démontrer que l'inversibilité de 3 est aussi suffisante. D'après la proposition 1.25, ceci se réduit à démontrer que toute fonction monomiale de multidegré parmi les suivants :

$$\begin{array}{c}(1,0),\ (2,0),\ (0,1),\ (0,2),\\ (1,1),\ (2,1),\ (1,2),\ (2,2)\end{array}$$

est dans la sous-algèbre engendré par les polynômes multisymétriques élémentaires.

Le cas des fonctions monomiales de multidegré $(1,0)$,$(2,0)$,$(0,1)$ ou $(0,2)$ est trivial, comme ile st expliqué dans létude du cas $(n,r)=(2,2)$. D'autre part, tout résultat valide dans le cas $(2,1)$ est aussi valide dans le cas $(1,2)$, par permutation des coordonnées. Il suffit donc détablir le résultat pour les multidegrés $(1,1),(2,1)$ et $(2,2)$.

Il y a deux partitions de vecteur indexant les fonctions monomiales de multidegré $(1,1)$. Ce sont aussi celles qui indexent les produits de polynômes multisymétriques élémentaires de ce multidegré. Ces partitions de vecteur sont $[(1,1)]$ et $[(1,0),(0,1)]$, et :

$$\begin{array}{rcl} m_{[(1,1)]} & = & e_{1,0}e_{0,1}-e_{1,1} \\ m_{[(1,0)(0,1)]} & = & e_{1,1} \end{array}$$

Il y a quatre partitions de vecteur indexant les fonctions monomiales de multidegré $(2,1)$, ainsi que les produits de polynômes multisymétriques élémentaires de ce multidegré. Il s'agit de :

$$\begin{array}{rclrcl} \mathfrak{p}_1 & = & [(2,1)], & \mathfrak{p}_2 & = & [(2,0)(0,1)] \\ \mathfrak{p}_3 & = & [(1,1)(1,0)], & \mathfrak{p}_4 & = & [(1,0)(1,0)(0,1)] \end{array}$$

Introduisons la *matrice de conversion* de la famille e vers la famille m dans la composante de $\mathfrak{J}_3^2(\mathbb{Z})$ de multidegré $(2,1)$. C'est la matrice dont le coefficient en colonne $e_{\mathfrak{p}}$, ligne $m_{\mathfrak{q}}$ est le coefficient de $m_{\mathfrak{q}}$ dans la décomposition de $e_{\mathfrak{p}}$ comme combinaison linéaire de fonctions monomiales. Elle vaut :

	$e_{\mathfrak{p}_1}$	$e_{\mathfrak{p}_2}$	$e_{\mathfrak{p}_3}$	$e_{\mathfrak{p}_4}$
$m_{\mathfrak{p}_1}$	0	0	0	1
$m_{\mathfrak{p}_2}$	0	0	1	1
$m_{\mathfrak{p}_3}$	0	1	1	2
$m_{\mathfrak{p}_4}$	1	1	2	2

Elle est inversible sur $\mathbb{Z}$. Donc toute fonction monomiale de multidegré $(2,1)$ est dans le sous-anneau engendré par les polynômes multisymétriques élémentaires.

Il y a huit partitions de vecteur indexant les fonctions monomiales de multidegré $(2,2)$, qui sont :

$$\begin{array}{rclrcl} \mathfrak{q}_1 & = & [(2,2)], & \mathfrak{q}_2 & = & [(2,1)(0,1)] \\ \mathfrak{q}_3 & = & [(2,0)(0,2)], & \mathfrak{q}_4 & = & [(2,0)(0,1)(0,1)] \\ \mathfrak{q}_5 & = & [(1,2)(1,0)], & \mathfrak{q}_6 & = & [(1,1)(1,1)] \\ \mathfrak{q}_7 & = & [(1,1)(1,0)(0,1)], & \mathfrak{q}_8 & = & [(1,0)(1,0)(0,2)] \end{array}$$

Il y a aussi huit partitions de vecteur indexant les produits de polynômes multisymétriques élémentaires de multidegré $(2,2)$, à savoir

$$\mathfrak{q}_2,\ \mathfrak{q}_3,\ \mathfrak{q}_4,\ \mathfrak{q}_5,\ \mathfrak{q}_6,\ \mathfrak{q}_7,\ \mathfrak{q}_8$$

et $\mathfrak{q}_9 = [(1,0)(1,0)(0,1)(0,1)]$.

La matrice de conversion est :

	$e_{\mathfrak{q}_2}$	$e_{\mathfrak{q}_3}$	$e_{\mathfrak{q}_4}$	$e_{\mathfrak{q}_5}$	$e_{\mathfrak{q}_6}$	$e_{\mathfrak{q}_7}$	$e_{\mathfrak{q}_8}$	$e_{\mathfrak{q}_9}$
$m_{\mathfrak{q}_1}$	0	0	0	0	0	0	0	1
$m_{\mathfrak{q}_2}$	0	0	0	0	0	1	1	2
$m_{\mathfrak{q}_3}$	0	0	0	0	1	1	0	1
$m_{\mathfrak{q}_4}$	0	0	0	1	2	2	1	2
$m_{\mathfrak{q}_5}$	0	0	1	0	0	1	0	2
$m_{\mathfrak{q}_6}$	0	1	2	0	2	2	2	4
$m_{\mathfrak{q}_7}$	1	1	2	1	2	3	2	4
$m_{\mathfrak{q}_8}$	1	0	1	0	2	2	0	2

Son déterminant vaut 3. Par suite, les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent la composante de $\mathfrak{I}_3^2(A)$ de multidegré $(2,2)$ si et seulement si 3 est inversible dans A. ■

Le théorème analogue à 1.19 que nous pouvons en déduire dans l'algèbre de MacMahon est le suivant :

Théorème 1.28 *Les fonctions élémentaires $\boldsymbol{e}_\alpha$ engendrent l'algèbre $\mathfrak{M}^r(\mathbb{Q})$, et sont algébriquement indépendantes.*

De même, les sommes de puissances $\boldsymbol{p}_\alpha$ engendrent $\mathfrak{M}^r(\mathbb{Q})$ et sont algébriquement indépendantes.

Le théorème est une conséquence immédiate du théorème 1.19 dans les $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$, *via* le lemme suivant :

Lemme 1.29 *Dans $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$, les $e_\mathfrak{p}$ (resp. les $p_\mathfrak{p}$) pour $|s(\mathfrak{p})| \leq n$ forment une base de l'espace vectoriel $\oplus_{i=0}^n \mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})_{|\,\mathrm{mdeg}\,|=i}$.*

Preuve : (du lemme).

D'après le théorème 1.19, ils forment une famille génératrice. Une base est donnée par la famille des $m_\mathfrak{p}$ avec $\ell_\mathfrak{p} \leq n$ et $|s(\mathfrak{p})| \leq n$. Visiblement la première condition ($\ell_\mathfrak{p} \leq n$) peut être omise, car impliquée par la seconde. Les familles considérées ont donc même cardinal – la dimension de $\oplus_{i=0}^n \mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})_{|\,\mathrm{mdeg}\,|=i}$ –, d'où le résultat. ■

Notes

- Le théorème fondamental (en caractéristique nulle) est souvent attribué à Hermann Weyl [85]. Pourtant d'autres en ont donné des preuves antérieurement : Schläfli [75], MacMahon [51], Emmy Noether [58].
- Le théorème fondamental dans le cas $n!$ inversible a été démontré par Richman (proposition 2 de [63]).
- Des cas particuliers du théorème 1.19 avec $n!$ non-inversible avaient été étudiés par Richman [62], Neeman [57], Fleischmann (dans la preuve du théorème 4.7 de [27]), et Hughes, Campbell et Pollack (paragraphe 6 de [14]). En particulier, le contre-exemple de notre lemme 1.22 vient de l'article de Fleischmann et celui de notre lemme 1.23 apparaît déjà chez Hughes, Campbell et Pollack [14] ainsi que chez Dalbec[21].
- En utilisant un lemme semblable au lemme 1.21, il est facile de voir que la famille formée de toutes les sommes de puissances multisymétriques engendre $\mathfrak{I}_n^r(A)$ si et seulement si $n!$ est inversible dans A, et qu'alors les premières sommes de puissances multisymétriques (celles d'indice α avec $|\alpha| \leq n$) suffisent. La clef est que cet énoncé est déjà vrai pour $r = 1$ (les polynômes symétriques).
- La proposition 1.25 vient aussi de l'article de Fleischmann [27]. Un autre ensemble générateur de $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Z})$, avec une procédure de réduction, que nous n'avons pas présenté ici, est proposée par Hughes, Campbell et Pollack [14]. On peut appliquer les deux procédures de réduction l'une à la suite de l'autre, obtenant ainsi un ensemble générateur encore plus petit.
- La proposition 1.26 a été démontrée par Dalbec par d'autres moyens : il exhibe une base SAGBI de $\mathfrak{I}_2^2(\mathbb{Z})$ et montre que les termes de cette base sont des polynômes à coefficients entiers en les élémentaires (théorème 2.7 de [21]).
- Pour un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos, le fait que les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent, ou non, $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{K})$, a une signification géométrique simple : voir le théorème 3.2.

1.5 La série de Hilbert-Poincaré de l'algèbre multigraduée $\mathfrak{I}_n^r$

Nous nous intéressons maintenant à la série de Hilbert-Poincaré de l'algèbre $\mathfrak{I}_n^r$, munie de la multigraduation définie dans la section 1.3 (le lemme 1.30 qui suit garantit que cette série ne dépend pas de l'anneau de base). Par définition, cette série est :

$$H\mathfrak{I}_n^r(t_1,\ldots,t_r) = \sum_{\delta\in\mathbb{N}^r} \mathrm{rang}(\mathfrak{I}^r_{n\ \mathrm{mdeg}=\delta})t_1^{\delta_1}\ldots t_r^{\delta_r}$$

où rang($\mathfrak{I}^r_{n\ \mathrm{mdeg}=\delta}$) est le rang de la composante homogène de multidegré δ de $\mathfrak{I}^r_n(A)$ sur l'anneau de base A.

Remarque : Dans le cas où A est un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, ou positive $k > n$, alors il existe une décomposition de Hironaka de $\mathfrak{I}^r_n(\mathbb{K})$:

$$\mathfrak{I}^r_n(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\eta \in \mathcal{B}} \eta \cdot \mathcal{T}^r_n(\mathbb{K})$$

où les η sont homogènes pour le multidegré (voir la section 1.2.2). Dans ce cas :

$$H\mathfrak{I}^r_n(\mathbf{t}) = \sum_\eta \mathbf{t}^{\mathrm{mdeg}\,\eta} H\mathfrak{I}^1_n(t_1)\cdots H\mathfrak{I}^1_n(t_r) = \frac{\sum_\eta \mathbf{t}^{\mathrm{mdeg}\,\eta}}{\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^n (1-t_i^j)} \tag{1.19}$$

Cette série est donc une fraction rationnelle. ⊡

Le lemme suivant montre que la série $H\mathfrak{I}^r_n(\mathbf{t})$ énumère des partitions de vecteur.

Lemme 1.30

$$H\mathfrak{I}^r_n(\mathbf{t}) = \sum_{l(\mathfrak{p}) \le n} \mathbf{t}^{s(\mathfrak{p})} \tag{1.20}$$

où la somme est effectuée sur toutes les partitions de vecteur $\mathfrak{p}$ *de longueur au plus* n.

Preuve : Pour tout $\delta \in \mathbb{N}^r$, le A-module libre $\mathfrak{I}^r_n(A)_{\mathrm{mdeg}=\delta}$ admet comme base l'ensemble des fonctions monomiales $m_\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p}$ partition du vecteur δ en au plus n parts. Donc :

$$\mathrm{rang}\,\mathfrak{I}^r_n(A)_{\mathrm{mdeg}=\delta} = \#\{\mathfrak{p} \mid \ell_\mathfrak{p} \le n \text{ et } s(\mathfrak{p}) = \delta\}$$

et donc :

$$H\mathfrak{I}^r_n(\mathbf{t}) = \sum_{\mathfrak{p} \mid \ell_\mathfrak{p} \le n} \mathbf{t}^{s(\mathfrak{p})}$$

■

Nous étudions donc les techniques d'énumération des partitions de vecteur, pour trouver des moyens de calcul de $H\mathfrak{I}^r_n(\mathbf{t})$.

1.5.1 Techniques générales d'énumération de partitions de vecteurs

La formule exponentielle

Nous exposons une première technique d'énumération de partitions de vecteurs. Pour cela, nous systématisons l'approche présentée par Andrews (chapitre 12 de [5]).

Pour une série formelle $g(t_1, t_2, \ldots)$ nous noterons $\boldsymbol{p}_k[g] = g(t_1^k, t_2^k, \ldots)$ pour tout $k \geq 1$ (cette notation est justifiée dans la suite).

Soit Ω une partie de $\mathbb{N}^r$. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^r$, soit $f_\Omega(\alpha; \ell)$ le nombre de partitions de α en exactement ℓ parts, toutes dans Ω. Soit la série génératrice des nombres de partitions de vecteur à parts dans Ω (mais dont la longueur est fixée) :

$$F_{\Omega,\ell}(\mathbf{t}) = F_{\Omega,\ell}(t_1, \ldots, t_r) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} f_\Omega(\alpha; \ell)\mathbf{t}^\alpha$$

Alors :

Proposition 1.31 *(la formule exponentielle)*

$$\sum_{\ell \geq 0} F_{\Omega,\ell}(\mathbf{t}) s^\ell = \exp\left(\sum_{k>0} \boldsymbol{p}_k[g_\Omega] \frac{s^k}{k}\right)$$

où $g_\Omega(t_1, \ldots, t_r) = \sum_{\vec{u} \in \Omega} \mathbf{t}^{\vec{u}}$.

Preuve : Choisissons une énumération de Ω : $\Omega = \{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots\}$. Alors $f_\Omega(\alpha, \ell)$ est le nombre de factorisations de $\mathbf{t}^\alpha s^\ell$ en $(s\mathbf{t}^{\omega^{(1)}})^{\mu_1} \cdot (s\mathbf{t}^{\omega^{(2)}})^{\mu_2} \cdots$ avec $\mu_i \in \mathbb{N}$. C'est donc le coefficient de $s^\ell \mathbf{t}^\alpha$ dans $\prod_{\omega \in \Omega} \frac{1}{1 - s\mathbf{t}^\omega}$. Ainsi :

$$\sum_{\ell \geq 0} F_{\Omega,\ell}(\mathbf{t}) s^\ell = \prod_{\omega \in \Omega} \frac{1}{1 - s\mathbf{t}^\omega}$$

donc :

$$\log\left(\sum_{\ell \geq 0} F_{\Omega,\ell} s^\ell\right) = \sum_{\omega \in \Omega} (-\log(1 - s\mathbf{t}^\omega)) = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{k>0} \mathbf{t}^{k \cdot \omega} \frac{s^k}{k}$$

d'où le résultat. ■

Appliquons cette proposition au cas qui nous intéresse particulièrement : $\Omega = \mathbb{N}^r$. Alors $f_\Omega(\alpha; \ell)$ est le nombre de partitions de α en au plus ℓ parts. C'est donc le rang du A-module libre $\mathfrak{J}_\ell^r(A)_{\mathrm{mdeg}=\alpha}$. Dans ce cas :

$$g_\Omega = \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)\cdots(1-t_r)}$$

et $F_{\Omega,n} = H\mathfrak{J}_n^r$.

Ainsi :

Corollaire 1.32

$$\sum_{n \geq 0} H\mathfrak{J}_n^r(t_1, \ldots, t_r) s^n = \exp\left(\sum_{k>0} \frac{1}{(1-t_1^k)(1-t_2^k)\cdots(1-t_r^k)} \frac{s^k}{k}\right)$$

Présentation pléthystique

Nous donnons une présentation pléthystique de la formule exponentielle.

Nous travaillons dans $\mathfrak{M}^1(\mathbb{Q})$, l'anneau des fonctions symétriques. Soit g une série formelle en $t_1, t_2, \ldots$. Les sommes de puissances $\boldsymbol{p}_k$ engendrent $\mathfrak{M}^1(\mathbb{Q})$ et sont algébriquement indépendantes. Il existe donc un unique morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres :$f \in \mathfrak{M}^1(\mathbb{Q}) \mapsto f[g]$ qui vérifie $\boldsymbol{p}_k[g] = g(t_1^k, t_2^k, \ldots)$ pour tout k. Remarquons que si $g \in \mathfrak{M}^1(\mathbb{Q})$ alors $f[g]$ aussi. On montre (dans [50], Ch.I, par.8) que l'opération ainsi définie sur $\mathfrak{M}^1$ est associative, de neutre bilatère $\boldsymbol{e}_1$. Cette opération s'apelle le *pléthysme* (ou aussi *composition* des fonctions symétriques).

Proposition 1.33 *Sous les hypothèses de la proposition 1.31 on a :*

$$F_{\Omega,\ell} = \boldsymbol{h}_\ell[g_\Omega]$$

Preuve : Rappelons l'identité entre série génératrice des sommes complètes et série génératrice des sommes de puissances :

$$\sum_{\ell \geq 0} \boldsymbol{h}_\ell s^\ell = \exp\left(\sum_{k>0} \frac{\boldsymbol{p}_k}{k} s^k\right)$$

Appliquons $f \mapsto f[g_\Omega]$ et identifions avec la formule de la proposition 1.31. ∎

Appliquons la proposition ci-dessus au cas qui nous intéresse.

Corollaire 1.34

$$H\mathfrak{I}_n^r(t_1, \ldots, t_r) = \boldsymbol{h}_n\left[\sum_{k \geq 0} h_k\right]$$

Preuve : Il suffit de rappeler la série génératrice des sommes complètes en $t_1, \ldots, t_r$:

$$\sum_{k \geq 0} h_k s^k = \frac{1}{(1 - st_1)(1 - st_2) \cdots (1 - st_r)}$$

∎

▷ **Exemple :** Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, on considère $S^N V$, la N-ième puissance symétrique de V. On choisit une base $(t_1, \ldots, t_k)$ de V, alors $S^N V$ est munie de la base des $\mathbf{t}^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^k$ et $|\alpha| = N$. Considérons maintenant $S^n(S^N V)$, cet espace vectoriel admet comme base celle des produits formels $(\mathbf{t}^{\alpha^{(1)}})(\mathbf{t}^{\alpha^{(2)}}) \cdots (\mathbf{t}^{\alpha^{(n)}})$ où tous les $\alpha^{(i)}$

sont dans $\mathbb{N}^k$ avec $|\alpha^{(i)}| = N$. On donne à un tel élément de base le multidegré $\alpha^{(1)} + \ldots + \alpha^{(n)}$. La série génératrice des dimensions des composantes multigraduées de $S^n(S^N V)$ est :

$$\sum_\alpha \dim S^n(S^N V)_{\mathrm{mdeg}=\alpha}\ \mathbf{u}^\alpha = F_{\Omega_N,n}(u_1, \ldots, u_k)$$

où Ω_N est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{N}^k$ de norme N. Alors

$$g_{\Omega_N} = h_N(u_1, \ldots, u_k)$$

la N-ième fonction symétrique somme complète. La série génératrice est donc donnée par la formule $\boldsymbol{h}_n[h_N]$.

Le polynôme symétrique $\boldsymbol{h}_n[h_N] - \boldsymbol{h}_N[h_n]$ se décompose, de façon unique, comme combinaison linéaire à coefficients entiers de fonctions de Schur. Une conjecture due à Foulkes [28] prévoit que tous ces coefficients sont positifs ou nuls lorsque $N \geq n$. Dans [36], Howe a suggéré que cette conjecture pouvait se démontrer en construisant un morphisme $GL(V)$-équivariant de $S^n(S^N V)$ dans $S^N(S^n V)$, qui devrait être surjectif pour $N \geq n$ et injectif pour $n \leq N$. Dans la section 3.5 de cette thèse, des éléments de réflexion sur cette conjecture, en termes de polynômes multisymétriques, sont donnés (le morphisme de $S^n(S^N V)$ dans $S^N(S^n V)$ est remplacé par un morphisme de $T^n_{sym}(S^N V)$ dans $S^N(T^n_{sym} V)$), où T_{sym} désigne les tenseurs symétriques). ◃

▹ **Exemple :** Nous donnons ici un exemple de calcul pratique. Nous sommes intéressés à connaître le nombre a_n de partitions du vecteur $(n, n, \ldots, n)$ de $\mathbb{N}^n$, en exactement n parts α vérifiant toutes $|\alpha| = n$. C'est le rang de la composante de $S^n(S^n V)$ de multidegré $(n, n, \ldots, n)$. C'est donc le coefficient de $m_{[n,n,\ldots,n]} = t_1^n \cdots t_n^n$ dans l'écriture de $\boldsymbol{h}_n[h_n]$ comme combinaison linéaire de fonctions monomiales. L'algèbre des polynômes symétriques est munie d'un produit scalaire dans lequel les produits de sommes complètes forment la base duale de la base des fonctions monomiales. Le nombre cherché a_n est donc le produit scalaire de $\boldsymbol{h}_n[\boldsymbol{h}_n]$ avec $\boldsymbol{h}_n^n$. Nous pouvons calculer les premiers termes de la suite des a_n à l'aide de la librairie ACE pour Maple [84] . Par exemple pour $n = 3$:

```
> with(SYMF):
> b:=SfPlethysm(h3,h3):
> a:=SfScalar(a,h3^3);
                              10
```

On peut énumérer facilement les dix partitions de vecteur vérifiant les conditions imposées :

$$\begin{gathered}[(111)^3]\,, \\ [(300)(021)(012)]\,, \quad [(030)(201)(102)]\,, \quad [(003)(210)(120)]\,, \\ [(210)(021)(102)]\,, \quad [(012)(201)(120)]\,, \\ [(111)(120)(102)]\,, \quad [(111)(210)(012)]\,, \quad [(111)(201)(021)]\,, \\ [(300)(030)(003)]\end{gathered}$$

L'ordinateur calcule sans difficulté les résultats suivants :

n	a_n
1	1
2	2
3	10
4	465
5	190 131
6	848 497 563

◁

Calcul facile

Nous revenons au problème de calculer la série génératrice $H\mathfrak{J}_n^r$. La formule donnée dans le corollaire 1.34 ne permet pas d'utiliser les implémentations du pléthysme des fonctions symétriques, car elle fait apparaître une infinité de sommes complètes.

De façon générale, pour calculer $F_{\Omega,\ell}$ lorsque g_Ω n'est pas une fonction symétrique (en particulier dans le cas où elle est donnée par une fraction rationnelle, comme dans le cas qui nous intéresse) on peut utiliser la formule $F_{\Omega,\ell} = \boldsymbol{h}_\ell[g_\Omega]$ (proposition 1.33) de la façon suivante : on calcule le polynôme P tel que $\boldsymbol{h}_\ell = P(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_\ell)$ dans $\mathfrak{M}^1(\mathbb{Q})$, puis on remplace chaque $\boldsymbol{p}_k$ par $\boldsymbol{p}_k[g_\Omega]$, qui est connu explicitement.

Pour calculer le polynôme P on peut utiliser les identités de récurrence duales des identités de Newton :

$$\forall n \geq 1, \quad \boldsymbol{h}_n + \sum_{i+j=n, i>0} \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{h}_j = 0$$

Nous présentons la démarche précise que nous suivons pour ces calculs. Elle est bien adaptée aux logiciels de calcul symbolique. (C'est aussi une méthode simple et efficace pour le calcul à la main).

Proposition 1.35 *On définit une dérivation ∂ sur $\mathfrak{M}^1(\mathbb{Q})$ par :*

$$\forall i > 0, \quad \partial \boldsymbol{p}_i = i\, \boldsymbol{p}_{i+1}$$

Alors :

$$\forall n \geq 0, \quad \boldsymbol{h}_n = \frac{1}{n!}(\partial + \boldsymbol{p}_1)^n \cdot 1$$

Autrement dit on a la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0, \quad (n+1)!\boldsymbol{h}_{n+1} = (\partial(n!\boldsymbol{h}_n) + n!\boldsymbol{h}_n\boldsymbol{p}_1)$$

et la condition initiale $h_0 = 1$.

Preuve : On considère la relation :

$$H(s) = \sum_{n\geq 0} \boldsymbol{h}_n s^n = \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{\boldsymbol{p}_k}{k} s^k\right)$$

On dérive par rapport à s :

$$\frac{\partial H(s)}{\partial\, s} = \sum_{n\geq 0}(n+1)\boldsymbol{h}_{n+1}s^n = H(s)\left(\sum_{k\geq 0} \boldsymbol{p}_{k+1}s^k\right)$$

D'autre part on applique ∂ à la relation initiale :

$$\partial H(s) = \sum_{n\geq 0} \partial(\boldsymbol{h}_n)s^n = H(s)\left(\sum_{k\geq 1} \frac{\partial(\boldsymbol{p}_k)}{k} s^k\right) = H(s)\left(\sum_{k\geq 1} \boldsymbol{p}_{k+1}s^k\right)$$

d'où le résultat, par identification des coefficients de s^n. ■

▷ **Exemple :** Effectuons ce calcul pour les petites valeurs de n :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h}_0 &= 1 \\
\boldsymbol{h}_1 &= \boldsymbol{p}_1 \\
2\,\boldsymbol{h}_2 &= (\partial + \boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_1^2 \\
6\,\boldsymbol{h}_3 &= (\partial + \boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_1^2) = 2\,\boldsymbol{p}_3 + 3\,\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_1^3 \\
24\,\boldsymbol{h}_4 &= (\partial + \boldsymbol{p}_1)(2\,\boldsymbol{p}_3 + 3\,\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_1^3) = 6\boldsymbol{p}_4 + 3\,\boldsymbol{p}_2^2 + 8\,\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_3 + 6\,\boldsymbol{p}_1^2\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_1^4
\end{aligned}$$

◁

Par cette méthode on a calculé les séries de Hilbert-Poincaré $H\mathfrak{J}_n^r(\mathbf{t})$ pour les petites valeurs de n et r.

Voici les résultats obtenus, avec plus de détails pour le cas $n = 3, r = 2$. Dans chaque cas nous ne présentons que le numérateur, le dénominateur étant $\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^n (1 - t_i^j)$. De plus, le numérateur étant une fonction symétrique en $t_1, \ldots, t_r$, nous le présentons exprimé dans la base des fonctions symétriques monomiales.

$\mathbf{n = 3, r = 2}$

$$m_{3,3} + m_{2,2} + m_{2,1} + m_{1,1} + 1$$

Dans la section 2.2 à suivre, nous obtenons deux décompositions de Hironaka de $\mathfrak{J}_3^2(\mathbb{Q})$. La première est :

$$\mathfrak{J}_3^2(\mathbb{Q}) = \mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{1,1}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{1,1}^2\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \\ \oplus e_{1,1}^3\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{2,1}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{1,2}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q})$$

Chaque élément de la base ainsi obtenue apporte sa contribution au numérateur de la série de Hilbert-Poincaré : le terme $m_{3,3} = t_1^3 t_2^3$ vient de $e_{1,1}^3$, le terme $m_{2,2} = t_1^2 t_2^2$ vient de $e_{1,1}^2$, le terme $m_{2,1} = t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2$ vient de $e_{2,1}$ et $e_{1,2}$, et le terme constant vient de l'unité de $\mathfrak{J}_3^2(\mathbb{Q})$.
La seconde décomposition de Hironaka trouvée est :

$$\mathfrak{J}_3^2(\mathbb{Q}) = \mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{1,1}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{1,1}^2\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \\ \oplus e_{1,2}e_{2,1}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{2,1}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{1,2}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q})$$

Dans cette décomposition, le terme $m_{3,3}$ vient de $e_{2,1}e_{1,2}$, et les autres termes viennent des mêmes éléments que dans la décomposition précédente.

$\mathbf{n = 3, r = 3}$

$$m_{3,2,2} + m_{3,3,0} + m_{3,2,1} + m_{2,2,2} + m_{3,1,1} + m_{2,2,1} \\ + m_{2,2,0} + m_{2,1,1} + m_{2,1,0} + m_{1,1,1} + m_{1,1,0} + 1$$

$\mathbf{n = 3, r = 4}$

$$1 + 3\,m_{2,2,1,1} + m_{1,1,0,0} + m_{3,3,0,0} + m_{2,1,0,0} + m_{2,2,0,0} + m_{1,1,1,0} \\ + m_{3,3,2,2} + m_{2,1,1,0} + m_{3,2,1,0} + m_{3,2,2,2} + 3\,m_{2,2,2,2} + m_{2,2,1,0} \\ + m_{2,2,2,0} + m_{3,2,2,0} + 3\,m_{2,1,1,1} + m_{3,3,1,1} + 3\,m_{1,1,1,1} + m_{3,2,1,1} \\ + m_{3,1,1,1} + m_{3,2,2,1} + 3\,m_{2,2,2,1} + m_{3,3,2,1} + m_{3,3,3,3} + m_{3,1,1,0}$$

$\mathbf{n = 4, r = 2}$

$$m_{6,6} + m_{5,5} + m_{5,4} + m_{5,3} + 2\,m_{4,4} + m_{4,3} + m_{4,2} \\ + 2\,m_{3,3} + m_{3,2} + m_{3,1} + 2\,m_{2,2} + m_{2,1} + m_{1,1} + 1$$

n = 4, r = 3

$$\begin{aligned}1 &+ 4\,m_{3,3,1} + 5\,m_{2,2,2} + 3\,m_{5,4,2} + 2\,m_{5,5,2} + 4\,m_{5,3,2} + 5\,m_{4,4,2}\\ &+ 6\,m_{4,3,2} + m_{2,1,0} + 2\,m_{2,2,0} + m_{5,5,1} + 4\,m_{5,4,3} + m_{1,1,0}\\ &+ 8\,m_{3,3,2} + 3\,m_{4,2,1} + 2\,m_{5,2,1} + 3\,m_{2,2,1} + 4\,m_{3,2,1} + m_{5,5,5}\\ &+ m_{4,2,0} + m_{3,2,0} + m_{4,3,0} + m_{5,4,0} + 2\,m_{4,4,0} + m_{5,3,0}\\ &+ 2\,m_{3,3,0} + m_{3,1,0} + 2\,m_{5,5,4} + m_{5,5,0} + 4\,m_{5,3,3} + 6\,m_{4,4,3}\\ &+ 5\,m_{4,4,4} + 2\,m_{5,5,3} + m_{6,5,3} + 8\,m_{4,3,3} + 8\,m_{3,3,3} + m_{5,1,1}\\ &+ 2\,m_{4,1,1} + 2\,m_{6,3,3} + m_{6,6,0} + m_{6,5,1} + m_{6,2,2} + m_{6,5,2}\\ &+ 2\,m_{5,4,1} + 2\,m_{6,4,2} + m_{6,4,4} + m_{6,3,2} + 3\,m_{5,4,4}\\ &+ 2\,m_{5,3,1} + m_{6,4,1} + m_{6,3,1} + 6\,m_{3,2,2} + 5\,m_{4,2,2} + 3\,m_{5,2,2}\\ &+ m_{6,4,3} + m_{1,1,1} + 2\,m_{2,1,1} + 4\,m_{4,3,1} + 2\,m_{3,1,1} + 3\,m_{4,4,1}\end{aligned}$$

n = 5, r = 2

$$\begin{aligned}1 &+ 3\,m_{4,3} + 4\,m_{5,4} + 4\,m_{4,4} + 6\,m_{5,5} + 4\,m_{6,6} + 2\,m_{4,2}\\ &+ 2\,m_{3,2} + 3\,m_{5,3} + m_{1,1} + m_{3,1} + 3\,m_{3,3}\\ &+ 2\,m_{2,2} + m_{2,1} + m_{5,2} + m_{4,1} + m_{8,5} + 3\,m_{7,7}\\ &+ 3\,m_{7,5} + 3\,m_{7,6} + 4\,m_{6,5} + 2\,m_{7,4} + 3\,m_{6,4} + m_{6,2}\\ &+ m_{7,3} + 2\,m_{6,3} + m_{10,10} + m_{9,7} + 2\,m_{8,6} + 2\,m_{8,7}\\ &+ m_{9,6} + 2\,m_{8,8} + m_{9,9} + m_{9,8} + m_{8,4}\end{aligned}$$

Remarque : Les polynômes $n!\,\boldsymbol{h}_n$ sont les *polynômes de Bell* des variables $y_i = i\,\boldsymbol{p}_i$. ⊡

1.5.2 La formule de Gessel et Garsia

Les résultats précédents sont tout à fait suffisants pour calculer $H\mathfrak{J}_n^r(\mathbf{t})$ pour chaque valeur de n et r. Mais il est naturel de chercher une formule présentant $H\mathfrak{J}_n^r(\mathbf{t})$ sous la forme :

$$H\mathfrak{J}_n^r(\mathbf{t}) = \frac{P(\mathbf{t})}{\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^n (1 - t_i^j)}$$

comme dans (1.19).

La solution est dûe à Gessel et Garsia [29] :

Théorème 1.36 *(*formule de Gessel et Garsia*)*

$$H\mathfrak{J}_n^r(\mathbf{t}) = \frac{\sum_{\sigma_r\circ\ldots\circ\sigma_1=\mathrm{id}} t_1^{\mathrm{maj}(\sigma_1)} \ldots t_r^{\mathrm{maj}(\sigma_r)}}{\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^n (1 - t_i^j)} \tag{1.21}$$

où les σ_i sont des permutations de $\{1, \ldots, n\}$, et maj(σ) *désigne l'indice majeur de la permutation σ.*

Rappelons que l'indice majeur d'une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ est le nombre $\mathrm{maj}(\sigma) = \sum_{\sigma(i)>\sigma(i+1)} i$.

▷ **Exemple :** Du théorème on déduit facilement une formule encore plus explicite du numérateur pour $n = 2$. Dans ce cas :

$$H\mathfrak{I}_2^r(\mathbf{t}) = \frac{\sum_{j\geq 0, j \text{ pair}} e_j(\mathbf{t})}{\prod_{i=1}^r (1-t_i)(1-t_i^2)} \tag{1.22}$$

où les e_j sont les polynômes symétriques élémentaires. Le théorème 2.6 donnera une décomposition de Hironaka de $\mathfrak{I}_2^r(\mathbb{K})$ (pour $\mathbb{K}$ corps de caractéristique différente de 2) qui permet de retrouver ce résultat sur la série de Hilbert-Poincaré. ◁

Remarque : La formule de Gessel et Garsia montre que dans toute décomposition de Hironaka de $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{K})$, pour $\mathbb{K}$ corps de caractéristique nulle, ou de caractéristique strictement supérieure à n, il y a autant d'invariants secondaires de multidegré α que de r-uplets $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ avec $\sigma_r \circ \cdots \circ \sigma_1$ et $\mathrm{maj}\, \sigma_i = \alpha_i$ pour chaque i. ⊡

La preuve de la formule de Gessel et Garsia repose sur un codage des partitions de vecteurs, développé dans [29], pour résoudre des problèmes de statistiques des permutations. Une statistique des permutations est une quantité associée aux permutations σ de $\{1, \ldots, n\}$ comme par exemple :

– Le nombre de descentes :

$$d(\sigma) = \#\{i \mid \sigma(i) > \sigma(i+1)\}$$

– L'indice majeur :

$$\mathrm{maj}(\sigma) = \sum_{\sigma(i)>\sigma(i+1)} i$$

– Le nombre d'inversions :

$$i(\sigma) = \#\{(i,j) \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

Dans cette section, nous redonnons la preuve de la formule de Gessel et Garsia. Nous commençons par montrer comment la formule est déduite de cette correspondance, avant de décrire sa construction.

Nous avons besoin de quelques notations et conventions supplémentaires pour les partitions d'entiers, en plus de celles introduites dans la section 1.1.1 et dans la section 1.1.5. On représentera, dans cette section, comme il est fait usuellement, une partition d'entiers par la suite décroissante de ses parts : $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_\ell > 0$. On pourra considérer, si besoin est, qu'on a completé la suite des λ_i par une suite infinie de zéros : $0 = \lambda_{\ell+1} = \lambda_{\ell+2} = \ldots$. La *conjuguée* de la partition λ est la partition λ^* où λ_i^* est le nombre de parts de λ supérieures ou égales à i. La conjugaison des partitions est une involution : $(\lambda^*)^* = \lambda$. L'ensemble des partitions d'entiers est munie d'opérations, notées $\cup$ et $+$, en posant que pour deux partitions $\lambda = [\lambda_1, \ldots \lambda_p]$ et $\mu = [\mu_1, \ldots, \mu_q]$, la partition $\lambda \cup \mu$ correspond au multi-ensemble :

$$[\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q]$$

et la partition $\lambda + \mu$ correspond au multi-ensemble :

$$[\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots]$$

On a la relation $(\lambda + \mu)^* = \lambda^* \cup \mu^*$.

▷ **Exemple :** Si $\lambda = [3, 2, 2]$ et $\mu = [3, 1]$ alors :

$$\begin{aligned}
&\lambda^* = [3, 3, 1] \\
&\mu^* = [2, 1, 1] \\
&\lambda \cup \mu = [3, 2, 2, 3, 1] = [3, 3, 2, 2, 1] \\
&\lambda + \mu = [3 + 3, 2 + 1, 2 + 0] = [6, 3, 2]
\end{aligned}$$

◁

Nous avons besoin d'une autre définition :

Définition 1.15 *Soient $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0)$ une partition d'entier de longueur au plus n, et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit que λ et σ sont* compatibles *si $\lambda_j = \lambda_{j+1} \Rightarrow \sigma(j) < \sigma(j+1)$. De façon équivalente :*

$$\sigma(j) > \sigma(j+1) \Rightarrow \lambda_j > \lambda_{j+1}$$

autrement dit chaque descente de σ provoque l'apparition d'une nouvelle part de la conjuguée λ^* de λ.

Cette définition appelle une remarque d'importance pour la suite : il existe une plus petite partition $\lambda^{(\sigma)}$ compatible à σ. Si les descentes de σ sont $d_1 < \ldots < d_k$ alors elle est définie par $(\lambda^\sigma)^* = [d_k, \ldots, d_1]$. Les autres partitions compatibles à σ sont les $\lambda^{(\sigma)} + \mu$, pour μ partition de longueur au plus n. Enfin $|\lambda^{(\sigma)}| = \mathrm{maj}(\sigma)$.

Théorème 1.37 *Il existe une bijection entre les partitions de vecteurs $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{N}^r$ en au plus n parts et les familles $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ où :*

- *Les σ_i sont des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ vérifiant : $\sigma_r \circ \ldots \circ \sigma_1 = \mathrm{id}$.*
- *Les $\lambda^{(i)}$ sont des partitions (d'entiers) de longueur au plus n.*
- *Pour chaque i, la partition $\lambda^{(i)}$ et la permutation σ_i sont compatibles.*

Dans cette correspondance la partition $\lambda^{(i)}$ est celle donnée par la suite des i-ièmes coordonnées des parts de $\mathfrak{p}$.

Avant de démontrer ce théorème nous montrons comment il implique la formule.

Preuve de la formule (1.21) à partir du théorème 1.37 : Étant donnés $\mathfrak{p}$ et $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)})$ en correspondance, nous voyons que $s_i(\mathfrak{p})$, la somme des i-ièmes coordonnées des parts de $\mathfrak{p}$, est égale à $|\lambda^{(i)}|$. Comme $\lambda^{(i)}$ est compatible avec σ_i, on a $\lambda^{(i)} = \lambda^{(\sigma_i)} + \mu^{(i)}$ pour une certaine partition μ. Mais alors $s_i(\mathfrak{p}) = |\lambda^{(\sigma_i)}| + |\mu^{(i)}| = \mathrm{maj}(\sigma_i) + |\mu^{(i)}|$.

Lorsque $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des partitions de vecteur en au plus n parts, les $\mu^{(i)}$ parcourent l'ensemble des partitions avec toutes les parts au plus égales à n. Ainsi :

$$H\mathfrak{J}_n^r(\mathbf{t}) = \sum_{\mathfrak{p} \mid \ell_{\mathfrak{p}} \le n} \prod_i t_i^{s_i(\mathfrak{p})} = \sum_{\sigma_r \circ \ldots \circ \sigma_1 = \mathrm{id}} \sum_{\substack{\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(r)} \\ \forall i,\, \ell_{\mu^{(i)}} \le n}} \left(\prod_{i=1}^r t_i^{|\mu^{(i)}|} \right) \left(\prod_{i=1}^r t_i^{\mathrm{maj}(\sigma_i)} \right)$$

Or :

$$\sum_{\substack{\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(r)} \\ \forall i,\, \ell_{\mu^{(i)}} \le n}} \left(\prod_{i=1}^r t_i^{|\mu^{(i)}|} \right) = 1/(1-t_i) \cdots (1-t_i^n)$$

d'où la formule. ■

La construction de Gessel et Garsia

Pour M une matrice à r lignes et n colonnes, on désigne par

$$M[i, j, \ldots, k | i', j', \ldots, k']$$

la sous-matrice des coefficients dont les indices de ligne sont les $i, j, \ldots, k$ et les indices de colonnes sont les $i', j' \ldots, k'$. Et $M[i, j, \ldots, k|-]$ (resp. $M[-|i, j, \ldots, k]$) désigne la matrice obtenue en ne gardant que les lignes (resp. les colonnes) d'indices $i, j, \ldots, k$.

Nous commençons par décrire la construction explicite de la correspondance. Un exemple suit (que le lecteur est invité à consulter, ceci l'aidera à comprendre la construction). Pour finir on démontre que la correspondance construite vérifie les conditions du théorème.

On commence par associer à toute $\mathfrak{p}$, partition de vecteur de $\mathbb{N}^r$, de longueur au plus n, la matrice $M_{\mathfrak{p}}$ à n colonnes, dont les colonnes non-nulles sont les parts de $\mathfrak{p}$ (répétées pour tenir compte des multiplicités), et sont rangées dans l'ordre lexicographique décroissant.

Les partitions $\lambda^{(i)}$ sont définies dans l'énoncé du théorème.

Construisons les permutations σ_i. Initialement on numérote trivialement les colonnes de $M_{\mathfrak{p}}$: le numéro de la j-ième colonne est $\tau_{r+1}(j) = j$.

Puis on construit successivement des numérotations $\tau_r, \ldots, \tau_1$ des colonnes de $M_{\mathfrak{p}}$ (les τ_i sont des éléments de $\mathfrak{S}_n$). Elles sont caractérisées par les deux règles :

règle 1 : la numérotation τ_i suit l'ordre lexicographique décroissant des dernières lignes de $M_{\mathfrak{p}}$ – celles d'indices $i, \dots, r$ –, autrement dit si $\tau_i(j) < \tau_i(k)$ alors c'est que la colonne $M_{\mathfrak{p}}[i \dots r|j]$ est supérieure ou égale à la colonne $M_{\mathfrak{p}}[i \dots r|k]$, suivant l'ordre lexicographique.

règle 2 : En cas d'égalité, la numérotation τ_i se fait en respectant la numérotation précédente τ_{i+1}, ce qui signifie que si $M_{\mathfrak{p}}[i \dots r|j] = M_{\mathfrak{p}}[i \dots r|k]$ alors $\tau_i(j) < \tau_i(k) \Leftrightarrow \tau_{i+1}(j) < \tau_{i+1}(k)$.

On définit enfin σ_i par $\sigma_i(\tau_i(j)) = \tau_{i+1}(j)$.

▷ **Exemple :** Soit $\mathfrak{p} = [(5,4,1)(5,3,2)(5,3,1)(3,3,3)(3,2,1)^2]$. La matrice associée est :

$$M_{\mathfrak{p}} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors $\lambda^{(1)} = [5,5,5,3,3,3], \lambda^{(2)} = [4,3,3,3,2,2], \lambda^{(3)} = [3,2,1,1,1,1]$.

Pour définir τ_3 on numérote les termes de la dernière ligne dans l'ordre décroissant de leurs valeurs (les numéros sont encadrés) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{6} \end{bmatrix}$$

autrement dit $\tau_3(1) = 3, \tau_3(2) = 2, \tau_3(3) = 4$, etc...

Pour définir τ_2 on ordonne les colonnes de la sous-matrice formée des deux dernières lignes :

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{6} \end{bmatrix}$$

Enfin $\tau_1 = id$.

Les permutations σ_i sont données par le schéma suivant :

$$\begin{array}{lcccccccl} \tau_1 : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & \\ & & & & & & & \downarrow \sigma_1 & \\ \tau_2 : & 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & & \\ & & & & & & & \downarrow \sigma_2 & \\ \tau_3 : & 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & & \\ & & & & & & & \downarrow \sigma_3 & \\ \tau_4 : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & \end{array}$$

◁

Vérifions que les objets construits satisfont aux conditions énoncées dans le théorème.

Condition $\sigma_r \circ \cdots \circ \sigma_1 = id$. Autrement dit $\tau_1 = id$.

Si les colonnes d'indices $j < k$ de $M_\mathfrak{p}$ portent des valeurs différentes, c'est que $M_\mathfrak{p}[-|j]$ est strictement supérieure à $M_\mathfrak{p}[-|k]$ suivant l'ordre lexicographique, donc, d'après la règle 1, on a $\tau_1(j) < \tau_1(k)$.

Si ces deux colonnes portent les mêmes valeurs, alors on applique la régle 2 pour tous les τ_i, en chaîne :

$$\begin{array}{rcl} j = \tau_{r+1}(j) < \tau_{r+1}(k) = k & \Leftrightarrow & \tau_r(j) < \tau_r(k) \\ \tau_r(j) < \tau_r(k) & \Leftrightarrow & \tau_{r-1}(j) < \tau_{r-1}(k) \\ & \vdots & \\ \tau_2(j) < \tau_2(k) & \Leftrightarrow & \tau_1(j) < \tau_1(k) \end{array}$$

et l'on obtient aussi que $\tau_1(j) < \tau_1(k)$. Comme τ ne change l'ordre relatif d'aucune paire d'indices, c'est que $\tau = id$.

Condition σ_i et $\lambda^{(i)}$ compatibles.

Remarquons d'abord que pour tout k, $\lambda_k^{(i)} = M_\mathfrak{p}[i|\tau_i^{-1}(k)]$.

Supposons que $\lambda_j^{(i)} = \lambda_{j+1}^{(i)}$.

Si les colonnes $M_\mathfrak{p}[i+1\dots r|\tau_i^{-1}(j)]$ et $M_\mathfrak{p}[i+1\dots r|\tau_i^{-1}(j+1)]$ sont distinctes, alors de :

$$\tau_i\tau_i^{-1}(j) < \tau_i\tau_i^{-1}(j+1)$$

on déduit (règle 1) que $M_\mathfrak{p}[i+1\dots r|\tau_i^{-1}(j)]$ est strictement supérieure à $M_\mathfrak{p}[i+1\dots r|\tau_i^{-1}(j+1)]$, suivant l'ordre lexicographique, donc :

$$\tau_{i+1}\tau_i^{-1}(j) < \tau_{i+1}\tau_i^{-1}(j+1)$$

Si les deux colonnes sont égales, alors la règle 2 amène à la même conclusion.

Il reste à montrer que l'application $\mathfrak{p} \mapsto (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}, \sigma_1, \dots, \sigma_r)$ est bijective. Elle est clairement injective : la construction est réversible. En effet, $M_\mathfrak{p}$ détermine $\mathfrak{p}$, et la i-ième ligne de $M_\mathfrak{p}$ est $(\lambda_i(\tau_i(1)), \lambda_i(\tau_i(2)), \dots)$ où les τ_i sont redéfinis à partir des σ_i par :

$$\tau_i = \tau_{i+1} \circ \sigma_i^{-1}, \qquad \tau_{r+1} = id \tag{1.23}$$

Il reste à montrer qu'elle est surjective. On se donne donc $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ vérifiant les conditions du théorème. On définit les τ_i comme ci-dessus (1.23), et soit M la matrice dont la i-ième ligne est :

$$\lambda^{(i)} \circ \tau_i = (\lambda^{(i)}_{\tau_i(1)}, \lambda^{(i)}_{\tau_i(2)}, \dots)$$

Il s'agit de montrer que les τ_i vérifient les règles 1 et 2 pour M (il faut aussi montrer que les colonnes de M sont rangées dans l'ordre lexicographique décroissant, mais ceci est équivalent à dire que τ_1 vérifie la règle 1).

Pour montrer que les τ_i vérifient la règle 1, on procède par récurrence sur i, en commençant par $i = r$.

Pour $i = r$, on s'aperçoit qu'il s'agit de vérifier que :

$$\tau_r(j) < \tau_r(k) \Rightarrow \lambda^{(r)}_{\tau_r(j)} \geq \lambda^{(r)}_{\tau_r(k)}$$

c'est trivial.

Supposons établi que τ_{i+1} vérifie la règle 1. On suppose que $\tau_i(j) < \tau_i(k)$, donc $\lambda^{(i)}_{\tau_i(j)} \geq \lambda^{(i)}_{\tau_i}(k)$.

On distingue deux cas :

$$\lambda^{(i)}_{\tau_i(j)} > \lambda^{(i)}_{\tau_i(k)}$$

et

$$\lambda^{(i)}_{\tau_i(j)} = \lambda^{(i)}_{\tau_i(k)}$$

Dans le second cas, par compatibilité de $\sigma_i = \tau_{i+1}\tau_i^{-1}$ avec $\lambda^{(i)}$ on obtient que :

$$\tau_{i+1}(j) < \tau_{i+1}(k)$$

ce qui par l'hypothèse de récurrence implique que $M[i{+}1 \dots r|j]$ est supérieur ou égal à $M[i+1 \dots r|k]$ suivant l'ordre lexicographique. Dans les deux cas il vient que $M[i \dots r|j]$ est supérieur ou égal à $M[i \dots r|k]$ suivant l'ordre lexicographique, ce qui était à démontrer.

Pour la règle 2 on procède de façon directe : si $M[i \dots r|j] = M[i \dots r|k]$ alors en particulier $\lambda^{(i)}_{\tau_i(j)} = \lambda^{(i)}_{\tau_i(k)}$. Par compatibilité de σ_i avec $\lambda^{(i)}$ il vient :

$$\tau_i(j) < \tau_i(k) \Leftrightarrow \tau_{i+1}(j) < \tau_{i+1}(k)$$

■

Notes

- Le lien entre polynômes de Bell et polynômes symétriques apparaît dans le traité de Riordan ([64], Ch.2, pb. 27(b)).
- Chez Andrews, la formule exponentielle pour énumérer les partitions de vecteur est présentée en termes de polynômes de Bell.
- La formule exponentielle explique les observations faites dans [13] sur les équations fonctionnelles vérifiées par la série génératrice des nombres de partitions de vecteur (en particulier elle donne une démonstration immédiate de la conjecture 3.1).

Chapitre 2

Calcul des relations entre les polynômes multisymétriques élémentaires

Dans ce chapitre nous présentons un algorithme pour calculer une famille génératrice finie de l'idéal $\mathcal{R}el_n^r$ de toutes les relations entre les polynômes multisymétriques élémentaires de $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$.

Après la description de l'algorithme, on suit son exécution pas-à-pas sur un exemple. Puis les résultats des exécutions sont présentés : en particulier on a réussi à calculer les idéaux des relations dans les cas $n = 3, r = 3$ et $n = 5, r = 2$.

Pour terminer, on remarque, d'une part, qu'il est facile d'adapter l'algorithme pour calculer les relations entre les sommes de puissances multisymétriques de $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$, et, d'autre part, que le résultat de l'exécution de l'algorithme pour le cas simple $n = 2$ (r quelconque) peut être décrit à l'avance (nous donnons cette description).

2.1 Principe de l'algorithme

Dans toute cette section n et r sont fixés.

Introduisons les notations : B_n^r est l'algèbre de polynômes à coefficients rationnels en des indéterminées $\boldsymbol{e}_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^r, 0 < |\alpha| \leq n$ (notées en gras, pour les distinguer des polynômes multisymétriques élémentaires, en lesquels ils vont se spécialiser). Elle est multigraduée par : $\mathrm{mdeg}(\boldsymbol{e}_\alpha) = \alpha$.

Remarque : L'algèbre B_n^r peut être vue comme une sous-algèbre de l'algèbre de MacMahon $\mathfrak{M}^r(\mathbb{Q})$, d'après le théorème 1.28. $\boxdot$

Soit le morphisme d'algèbres multigraduées :

$$\phi : B_n^r \to \mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$$

qui envoie la variable $\boldsymbol{e}_\alpha$ sur le polynôme multisymétrique élémentaire correspondant :

$$\forall \alpha, \quad \boldsymbol{e}_\alpha \mapsto e_\alpha$$

Ce morphisme induit un isomorphisme entre la sous-algèbre de B_n^r engendrée par les $\boldsymbol{e}_{i\xi_j}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, r$ (ce sont les $\boldsymbol{e}_\alpha$ avec α ayant une seule coordonnée non-nulle), et la sous-algèbre $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q})$ de $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$ (voir la section 1.5).

Nous identifions ces deux objets, faisant ainsi de B_n^r une $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q})$-algèbre, et de ϕ un morphisme de $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q})$-algèbres.

Nous dirons d'un monôme de B_n^r qu'il est *purement primaire* s'il est dans $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q})$, et qu'il est *purement secondaire* s'il est constitué seulement de variables $\boldsymbol{e}_\alpha$ extérieures à $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q})$ (*variables secondaires*). En général, un monôme ne sera ni primaire ni secondaire, mais se factorisera en $M = \bar{M}\tilde{M}$ avec $\bar{M}$ primaire et $\tilde{M}$ secondaire (Cette terminologie est justifiée par la présentation de $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$ comme anneau d'invariants, voir la définition 1.11).

Soit $\mathcal{R}el_n^r \subset B_n^r$ l'idéal des relations entre les $\boldsymbol{e}_\alpha$, autrement dit $\mathcal{R}el_n^r = \ker \phi$. C'est un idéal homogène pour la multigraduation.

Voici une description, dans les grandes lignes, de l'algorithme que nous proposons :

- La famille génératrice de $\mathcal{R}el_n^r$ qui est calculée est la base de Gröbner réduite $\mathcal{G}$ de cet idéal, pour un certain ordre monomial, mais le calcul n'utilise pas l'algorithme de Buchberger. Il n'utilise aucun calcul de S-polynôme.
- Le calcul est guidé par la série de Hilbert-Poincaré multivariée (voir la section 1.5 pour le calcul de cette série). Elle indique, à chaque étape, en quel multidegré chercher les nouveaux éléments de $\mathcal{G}$.
- La théorie des polynômes multisymétriques nous donne une famille génératrice finie de l'espace vectoriel des relations de multidegré donné, pour chaque multidegré.
- L'ordre monomial choisi se comporte bien avec la description de $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$ comme algèbre d'invariants donnée par la proposition 1.3. Plus précisément, tous les monômes initiaux des éléments de $\mathcal{G}$ sont des monômes purement secondaires. Aussi, les mônomes irréductibles purement secondaires donnent une base d'invariants secondaires sur le sous-module $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q})$ des invariants primaires.

La suite de cette section est organisée ainsi : on explique comment obtenir les relations en multidegré donné, puis on précise comment choisir un ordre monomial convenable pour l'algorithme. Enfin on donne la description détaillée de cet algorithme.

Les relations en multidegré donné.

On considère le morphisme d'algèbres multigraduées :

$$\Psi : \mathfrak{M}^r(\mathbb{Q}) \to B_n^r$$

caractérisé par :

$$\forall \alpha \neq 0, \quad \boldsymbol{e}_\alpha \mapsto \begin{cases} \boldsymbol{e}_\alpha & \text{si} \quad |\alpha| \leq n \\ 0 & \text{si} \quad |\alpha| > n \end{cases}$$

Il est bien défini, en vertu du théorème 1.28. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}^r(\mathbb{Q}) \arrow[d, "\Psi"'] \arrow[dr, "\rho_n"] & \\ B_n^r \arrow[r, two heads, "\phi"'] & \mathfrak{J}_n^r(\mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

Des relations sont produites de la façon suivante : soit $\mathfrak{p}$ une partition de vecteur de $\mathbb{N}^r$ avec $\ell_\mathfrak{p} > n$, alors $\rho_n(\boldsymbol{m}_\mathfrak{p}) = 0$, donc $\Psi(\boldsymbol{m}_\mathfrak{p}) \in \mathcal{R}el_n^r$.

▷ **Exemple :** Reprenons l'exemple $n = 2, r = 2$. Dans $\mathfrak{M}^2(\mathbb{Q})$ on a la décomposition :

$$\begin{aligned} 3\boldsymbol{m}_{[(1,1)(1,0)(0,1)]} = \\ \boldsymbol{e}_{0,1}\,\boldsymbol{e}_{1,0}\,\boldsymbol{e}_{1,1} - {\boldsymbol{e}_{1,1}}^2 + \boldsymbol{e}_{0,1}\,\boldsymbol{e}_{2,1} - {\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\,\boldsymbol{e}_{2,0} + \boldsymbol{e}_{1,0}\,\boldsymbol{e}_{1,2} \\ - {\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\,\boldsymbol{e}_{0,2} + 4\,\boldsymbol{e}_{2,0}\,\boldsymbol{e}_{0,2} - 4\,\boldsymbol{e}_{2,2} \end{aligned}$$

Projetant dans $\mathfrak{J}_2^2(\mathbb{Q})$ on obtient la relation :

$$0 = e_{0,1}\,e_{1,0}\,e_{1,1} - {e_{1,1}}^2 - {e_{0,1}}^2\,e_{2,0} - {e_{1,0}}^2\,e_{0,2} + 4\,e_{2,0}\,e_{0,2}$$

◁

On dispose en fait du résultat précis suivant :

Théorème 2.1 *L'idéal $\mathcal{R}el_n^r$ est engendré par la famille des $\Psi(\boldsymbol{m}_\mathfrak{p})$ pour les partitions de vecteur $\mathfrak{p}$ vérifiant $\ell_\mathfrak{p} = n + 1$.*

Preuve : Le morphisme Ψ est surjectif, et l'image réciproque de $\mathcal{R}el_n^r$ est $\bigoplus_{\ell_\mathfrak{p} > n} \mathbb{Q}\boldsymbol{m}_\mathfrak{p}$. Pour tout entier positif ℓ, notons J_ℓ l'idéal de $\mathfrak{M}^r(\mathbb{Q})$ engendré par les $\boldsymbol{m}_\mathfrak{p}$ pour $\ell_\mathfrak{p} = \ell$. Il suffit donc de montrer que J_{n+1} contient tous les J_ℓ pour $\ell \geq n + 1$.

Soit un entier positif ℓ. Soit $[\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(\ell)}]$ une partition de vecteur de longueur ℓ exactement (donc tous les $\alpha^{(i)}$ sont non-nuls). La formule du produit de fonctions monomiales (proposition 1.11) appliquée au produit de $\boldsymbol{m}_{[\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(\ell-1)}]}$ et $\boldsymbol{p}_{\alpha^{(\ell)}} = \boldsymbol{m}_{[\alpha^{(\ell)}]}$ donne une formule :

$$\boldsymbol{m}_{[\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(\ell-1)}]}\,\boldsymbol{p}_{\alpha^{(\ell)}} = c\,\boldsymbol{m}_{[\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(\ell)}]} + \sum \bullet\,\boldsymbol{m}_{\mathfrak{q}}$$

où c et les $\bullet$ sont des nombres entiers strictement positifs et les $\mathfrak{q}$ sont des partitions de vecteur de longueur $\ell - 1$. Isoler $\boldsymbol{m}_{[\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(\ell)}]}$ l'exprime comme élément de l'idéal $J_{\ell-1}$. Ainsi $J_\ell \subset J_{\ell-1}$, et ceci pour tout $\ell > 0$. D'où le résultat. ■

Par conséquent, pour connaître une famille génératrice de la composante de multidegré α de $\mathcal{R}el_n^r$, il suffit de calculer les $\Psi(m_{\mathfrak{p}})$ pour $\mathfrak{p}$ partition du vecteur α en $n+1$ parts exactement.

Remarque : Les techniques mises en œuvre ici utilisent fortement que le corps de base est $\mathbb{Q}$. D'une part, on utilise que les $\boldsymbol{e}_\alpha$ engendrent $\mathfrak{M}^r(\mathbb{Q})$, et ce résultat ne demeure pas pour $\mathfrak{M}^r(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}$ corps de caractéristique positive. D'autre part, dans la preuve que nous donnons du théorème 2.1, on doit inverser des coefficients c de taille arbitrairement grande. ⊡

Choix de l'ordre monomial

Un ordre monomial adapté à l'algorithme élaboré sera un ordre vérifiant donc la propriété : *Pour des monômes de multidegré donné, un monôme purement secondaire est plus grand que tout monôme contenant des variables primaires.*

Définition 2.1 *Nous dirons d'un tel ordre qu'il* privilégie les variables secondaires*.*

Un tel ordre $\preceq$ peut être construit en définissant un poids ω sur l'ensemble des monômes de B_n^r par :

$$\omega(\boldsymbol{e}_\alpha) = \begin{cases} |\alpha| & \text{si} \quad \boldsymbol{e}_\alpha \notin \mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q}) \\ 0 & \text{si} \quad \boldsymbol{e}_\alpha \in \mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q}) \end{cases} \tag{2.1}$$

puis en choisissant un ordre monomial arbitraire $\preceq'$, et en décidant que pour deux monômes M_1, M_2 :

$$M_1 \preceq M_2 \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \omega(M_1) < \omega(M_2) \\ \text{ou} \\ \omega(M_1) = \omega(M_2) \text{ et } M_1 \preceq' M_2 \end{array}$$

Dans la suite nous supposons choisi un tel ordre $\preceq$.

Nous dirons qu'un monôme de B_n^r est *irréductible* pour l'ordre $\preceq$ et l'idéal $\mathcal{R}el_n^r$ s'il n'est pas égal à une combinaison linéaire de monômes plus petits, *modulo* l'idéal $\mathcal{R}el_n^r$.

Proposition 2.2 *Les images dans $\mathfrak{J}_n^r(\mathbb{Q})$ des monômes purement secondaires qui sont irréductibles pour $\preceq$ et $\mathcal{R}el_n^r$ forment une base de $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q})$-module.*

Preuve : Notons $\mathcal{T}^+$ l'unique idéal homogène maximal de $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q})$ (celui des polynômes sans terme constant). Les images dans $B_n^r/\mathcal{R}el_n^r \cong \mathfrak{J}_n^r(\mathbb{Q})$ de tous les monômes irréductibles pour $\preceq$ et $\mathcal{R}el_n^r$ forment une base de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Par suite, leurs images dans $\mathfrak{J}_n^r(\mathbb{Q})/\mathcal{T}^+\mathfrak{J}_n^r(\mathbb{Q})$ forment une famille génératrice de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On en extrait une base. Notons $N_1, \ldots, N_d$ les monômes irréductibles dont les images forment cette base. D'après le théorème 1.2, les images des N_i dans $\mathfrak{J}_n^r(\mathbb{Q})$ forment une base de $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q})$-module. Nécessairement les N_i sont purement secondaires, puisque les variables primaires sont dans $\mathcal{T}^+$. Il reste seulement à montrer que tous les monômes purement secondaires irréductibles sont parmi les N_i.

Supposons qu'on dispose d'un monôme M purement secondaire irréductible qui n'est pas parmi les N_i. Il existe une décomposition de M comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q})$ des N_i, *modulo* l'idéal des relations :

$$M = \sum_i t_i N_i \mod \mathcal{R}el_n^r$$

On peut supposer cette décomposition homogène pour le multidegré. Alors chaque t_i est soit dans $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ soit dans $\mathcal{T}^+$. On a donc obtenu une relation :

$$M - \sum_{t_i \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}} t_i N_i - \sum_{t_i \in \mathcal{T}^+} t_i N_i \ \in\ \mathcal{R}el_n^r$$

Comme $\preceq$ est un ordre privilégiant les variables secondaires, le terme dominant de cette relation est parmi M et les N_i avec $t_i \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Mais chacun de ces termes est irréductible pour $\preceq$ et $\mathcal{R}el_n^r$: contradiction. ■

Corollaire 2.3

- *Les monômes irréductibles pour $\mathcal{R}el_n^r$ et $\preceq$ sont les produits MN, pour M monôme purement primaire arbitraire et N monôme purement secondaire irréductible.*
- *Les monômes initiaux des éléments de la base de Gröbner réduite de $\mathcal{R}el_n^r$ pour $\preceq$ sont des monômes purement secondaires.*

Le corollaire qui suit n'est pas nécessaire pour la présentation de l'algorithme, mais sera utilisé par deux fois dans la suite.

Corollaire 2.4 *Soit $\preceq$ un ordre monomial privilégiant les variables secondaires (définition 2.1). On note* $\mathrm{in}(\mathcal{R}el_n^r)$ *l'idéal engendré par les monômes de tête, pour $\preceq$, des éléments de $\mathcal{R}el_n^r$ Soit $\mathcal{T}^+$ l'unique idéal homogène maximal de $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q})$ (celui des polynômes sans terme constant).*

– *Soit K un idéal monomial de B_n^r avec $K \subset \mathrm{in}(\mathcal{R}el_n^r)$. Alors :*

$$K = \mathrm{in}(\mathcal{R}el_n^r) \quad \Leftrightarrow \quad \dim B_n^r/(K + \mathcal{T}^+ B_n^r) = (n!)^{r-1}$$

– *Soit J un idéal de B_n^r avec $J \subset \mathcal{R}el_n^r$. Soit $\mathrm{in}(J)$ l'idéal engendré par les monômes de tête, pour $\preceq$, des éléments de J. Alors :*

$$J = \mathcal{R}el_n^r \quad \Leftrightarrow \quad \dim B_n^r/(\mathrm{in}(J) + \mathcal{T}^+ B_n^r) = (n!)^{r-1}$$

Preuve : Tout d'abord, il y a $(n!)^{r-1}$ monômes purement secondaires irréductibles pour $\preceq$ et $\mathcal{R}el_n^r$, puique leurs images dans $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$ forment une base de $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q})$-module (proposition 2.2), et que ce module est de rang $(n!)^{r-1}$ (proposition 1.3). Les images de ces mêmes monômes dans $B_n^r/(\mathrm{in}(\mathcal{R}el_n^r) + \mathcal{T}^+ B_n^r)$ forment une base de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Le nombre $(n!)^{r-1}$ est donc encore la dimension de cet espace vectoriel.

Soit K un idéal monomial comme dans l'énoncé. Supposons que la dimension de $B_n^r/(K + \mathcal{T}^+ B_n^r)$ soit $(n!)^{r-1}$. Autrement dit $K + \mathcal{T}^+ B_n^r$ et $\mathrm{in}(\mathcal{R}el_n^r) + \mathcal{T}^+ B_n^r$ ont même codimension dans l'espace vectoriel B_n^r. Comme on a déjà une relation d'inclusion entre ces sous-espaces, ils sont égaux. Ceci implique en particulier que $\mathrm{in}(\mathcal{R}el_n^r) \subset K + \mathcal{T}^+ B_n^r$. Or $\mathrm{in}(\mathcal{R}el_n^r)$ admet une famille génératrice formée de monômes purement secondaires (corollaire 2.3). Tout élément de cette famille génératrice est donc dans K, et donc $\mathrm{in}(\mathcal{R}el_n^r) \subset K$. D'où le premier volet du corollaire.

Le second volet du corollaire s'obtient en appliquant le premier volet à $K = \mathrm{in}(J)$, il vient $\mathrm{in}(J) = \mathrm{in}(\mathcal{R}el_n^r)$, puis en utilisant le fait bien connu de la théorie des bases de Gröbner : que deux idéaux, l'un étant inclus dans l'autre, et ayant des idéaux initiaux égaux, sont eux-même égaux (voir [25], lemme 15.5). ∎

Description détaillée

Nous pouvons maintenant donner une description détaillée de l'algorithme.

Il consiste à construire par étapes la base de Gröbner réduite $\mathcal{G}$ de $\mathcal{R}el_n^r$ pour $\preceq$.

On notera I l'idéal monomial engendré par les termes initiaux des polynômes dans $\mathcal{R}el_n^r$ pour $\preceq$, et S l'ensemble des monômes initiaux des éléments de $\mathcal{G}$, c'est donc l'ensemble générateur minimal de I.

À chaque étape on construit un diagramme en escalier $\mathcal{E}_k$ de $\mathbb{N}^r$ (c'est à dire un sous-ensemble de $\mathbb{N}^r$ stable par diminution des coordonnées), obtenant ainsi une suite :

$$\emptyset = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_q$$

Après avoir construit $\mathcal{E}_k$ on calcule aussi S_k (resp. $\mathcal{G}_k$) l'ensemble des éléments de S (resp. $\mathcal{G}$) avec multidegré dans $\mathcal{E}_k$, et la série de Hilbert

Poincaré $HI_k(\mathbf{t})$ de I_k l'idéal monomial engendré par S_k. À la fin on obtient $I_q = I$ et $\mathcal{G}_q = \mathcal{G}$.

Nous commençons par expliquer comment calculer la série $HI_k(\mathbf{t})$, connaissant S_k.

Soient $M_1, \ldots, M_s$ les éléments de S_k, ils forment donc la famille génératrice minimale de I_k. Soit $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^r$. Pour $i = 1, \ldots, s$, notons $A_i(\mathbf{d})$ l'ensemble des monômes multiples de M_i et de multidegré $\mathbf{d}$. Alors l'union des $A_i(\mathbf{d})$ engendre l'espace vectoriel de $I_k(\mathbf{d})$, la composante de multidegré $\mathbf{d}$ de I_k. On a la formule d'inclusion-exclusion :

$$\# \cup_i A_i(\mathbf{d}) = \sum_{\mathcal{P} \subset \{1,\ldots,s\}} (-1)^{(1+\#\mathcal{P})} \# \bigcap_{i \in \mathcal{P}} A_i(\mathbf{d})$$

L'ensemble $\bigcap_{i \in \mathcal{P}} A_i(\mathbf{d})$ est l'ensemble des monômes multiples du p.p.c.m des $M_i, i \in \mathcal{P}$ de degré $\mathbf{d}$. On obtient donc :

$$\dim I_k(\mathbf{d}) = \sum_{\mathcal{P} \subset \{1,\ldots,s\}} (-1)^{(1+\#\mathcal{P})} \#\{M \text{ monômes} \mid \operatorname{mdeg} M + \operatorname{mdeg} M_{\mathcal{P}} = \mathbf{d}\}$$

où $M_{\mathcal{P}}$ est le plus petit commun multiple des M_i pour $i \in \mathcal{P}$. Soit $HB_n^r(\mathbf{t})$ la série de Hilbert-Poincaré de l'algèbre ambiante B_n^r, elle vaut :

$$HB_n^r(\mathbf{t}) = \prod_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^r \\ 0 < |\alpha| \leq n}} \frac{1}{1 - \mathbf{t}^\alpha}$$

et on a donc :

$$HI_k(\mathbf{t}) = Q_k(\mathbf{t}) HB_n^r(\mathbf{t})$$

avec Q_k le polynôme :

$$Q_k(\mathbf{t}) = \sum_{\mathcal{P} \subset \{1,\ldots,s\}} (-1)^{(1+\#\mathcal{P})} \mathbf{t}^{M_{\mathcal{P}}} \tag{2.2}$$

Indiquons aussi comment construire la série de Hilbert-Poincaré de I. Comme I est l'idéal initial de $\mathcal{R}el_n^r$, les séries de Hilbert-Poincaré de ces deux idéaux sont les mêmes (voir par exemple [18], ch.9, prop. 4). D'où :

$$HI(\mathbf{t}) = HB_n^r(\mathbf{t}) - H\mathfrak{I}_n^r(\mathbf{t})$$

La section 1.5 nous donne une écriture :

$$H\mathfrak{I}_n^r(\mathbf{t}) = P(\mathbf{t}) / \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{n} (1 - t_i^j)$$

donc :

$$H\mathfrak{I}_n^r(\mathbf{t}) = \prod_{\alpha \in U} (1 - \mathbf{t}^\alpha) P(\mathbf{t}) HB_n^r(\mathbf{t})$$

où U est l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{N}^r$ avec $0 < |\alpha| \leq n$ et au moins deux coordonnées non-nulles. Ainsi :

$$HI(\mathbf{t}) = Q(\mathbf{t})HB_n^r(\mathbf{t})$$

avec :

$$Q(\mathbf{t}) = 1 - \prod_{\alpha \in U}(1 - \mathbf{t}^\alpha)P(\mathbf{t}) \tag{2.3}$$

Supposons construits $\mathcal{E}_k, S_k$ et $\mathcal{G}_k$, nous expliquons comment construire alors $\mathcal{E}_{k+1}, S_{k+1}$ et $\mathcal{G}_{k+1}$:

- La série de Hilbert Poincaré de I/I_k est connue, c'est $HI(\mathbf{t}) - HI_k(\mathbf{t})$. Cet idéal monomial admet comme ensemble générateur minimal $S \setminus S_k$. Sa série de Hilbert-Poincaré est donc de la forme :

$$\sum_{s \in S \setminus S_k} \mathbf{t}^{\operatorname{mdeg} s} + \ldots$$

  où chacun des monômes dans les $\ldots$ a son multidegré strictement plus grand que l'un des $\operatorname{mdeg} s\,, s \in S \setminus S_k$. On choisit arbitrairement un terme de multidegré minimal, $c \cdot \mathbf{t}^\alpha$, donc il y a c éléments de $S \setminus S_k$ de multidegré α, et tous les éléments de S de multidegré plus petit sont dans S_k. Le nouveau diagramme en escalier est celui obtenu en adjoignant α à $\mathcal{E}_k$, autrement dit :

$$\mathcal{E}_{k+1} = \mathcal{E}_k \cup ([0, \alpha_1] \times \ldots \times [0, \alpha_r])$$

- Les $\Psi(m_\mathfrak{p})$, pour $\mathfrak{p}$ partition du vecteur α en $n+1$ parts exactement, forment une famille génératrice de la composante de multidegré α de $\mathcal{R}el_n^r$, d'après le théorème 2.1.
  On réduit ces relations modulo $\mathcal{G}_k$ et les unes par rapport aux autres (en suivant l'ordre $\preceq$). À l'issue de cette étape, les monômes initiaux font partie de l'ensemble générateur minimal S de I. En effet, si l'un d'eux était divisible par un monôme de I, il serait aussi divisible par un monôme de S, de multidegré strictement plus petit, donc dans S_k, ce qui est exclu, grâce à la réduction préalable modulo $\mathcal{G}_k$.
  Par suite, adjoignant ces relations à $\mathcal{G}_k$, on obtient $\mathcal{G}_{k+1}$.

Donnons encore quelques précisions sur les calculs à faire :

– On a :

$$HI(\mathbf{t}) - HI_k(\mathbf{t}) = (Q(\mathbf{t}) - Q_k(\mathbf{t}))HB_n^r(\mathbf{t}) = (Q(\mathbf{t}) - Q_k(\mathbf{t}))(1 + \cdots)$$

  et donc choisir un terme de multidegré minimal dans la série $HI(\mathbf{t}) - HI_k(\mathbf{t})$ se fait en choisissant un terme de multidegré minimal dans le polynôme $Q(\mathbf{t}) - Q_k(\mathbf{t})$.

– Dans la pratique, pour chercher les éléments de $\mathcal{G}$ de multidegré α, il est inutile de calculer tous les $\Psi(m_{\mathfrak{p}})$ avec $\ell_{\mathfrak{p}} = n+1, s(\mathfrak{p}) = \alpha$. Il suffit de les calculer et de les réduire au fur et à mesure, jusquà obtenir c relations non-nulles.

En résumé, voici comment se présente l'algorithme (le rôle de Q_k (resp. $\mathcal{G}_k$) est joué par par une variable $Q_\star$ (resp. $\mathcal{G}_\star$))

- en entrée : n,r, un ordre monomial $\preceq$ sur les monômes en les $\boldsymbol{e}_\alpha$ secondaires.
- en sortie : la base de Gröbner réduite $\mathcal{G}$ de $\mathcal{R}el_n^r$ pour $\preceq$.
- algorithme :
    - $\mathcal{G}_\star := \emptyset$
    - $Q_\star(\mathbf{t}) := 0$
    - Calculer $Q(\mathbf{t})$ comme dans (2.3).
    - Tant que $Q_\star(\mathbf{t}) \neq Q(\mathbf{t})$ effectuer :
        - choisir un terme de multidegré minimal $c{\cdot}\mathbf{t}^\alpha$ dans $Q(\mathbf{t}) - Q_\star(\mathbf{t})$
        - $T := \emptyset$
        - Tant que A n'a pas c éléments :
            - pour une nouvelle partition $\mathfrak{p}$ du vecteur α avec $\ell_{\mathfrak{p}} = n+1$, produire $G = \Psi(m_{\mathfrak{p}})$.
            - réduire G modulo $\mathcal{G}_\star$ pour l'ordre $\preceq$ (mettre le résultat dans G).
            - réduire G modulo T pour l'ordre $\preceq$ (mettre le résultat dans G).
            - Si $G \neq 0$ alors réduire les éléments de T relativement à G, puis faire $T := T \cup \{G\}$.
        - $\mathcal{G}_\star := \mathcal{G}_\star \cup T$
        - Calculer $Q_\star(\mathbf{t})$ suivant la formule (2.2).
    - Renvoyer $\mathcal{G}_\star$

Notes

- La méthode présentée pour produire des relations en multidegré donné est due à Junker. Par cette méthode, dans [44], Junker produit de nombreuses relations entre polynômes multisymétriques élémentaires. Mais il ne dispose d'auncun critère lui indiquant quand il a calculé suffisamment de relations.
- Le théorème 2.1 est dû à John Dalbec [21, 22].

2.2 Un exemple

On fait fonctionner l'algorithme pour $n = 3, r = 2$.

Les variables secondaires sont :

$$\boldsymbol{e}_{1,1},\ \boldsymbol{e}_{2,1},\ \boldsymbol{e}_{1,2}$$

Les variables primaires sont :

$$\boldsymbol{e}_{1,0},\ \boldsymbol{e}_{0,1},\ \boldsymbol{e}_{2,0},\ \boldsymbol{e}_{0,2},\ \boldsymbol{e}_{3,0},\ \boldsymbol{e}_{0,3}$$

Les indéterminées étant énumérées dans cet ordre, on choisit une matrice définissant l'ordre monomial pour les variables secondaires (c'est suffisant, puisque les variables primaires n'apparaîtront jamais dans les monômes de tête) :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La première colonne donne le poids de la première variable, la deuxième colonne celui de la deuxième variable, etc... Chaque monôme est ainsi muni d'un poids (un vecteur de $\mathbb{Z}^3$). Deux monômes sont comparés en comparant leurs vecteurs-poids dans l'ordre lexicographique. La première ligne de la matrice est imposée par la condition de compatibilité avec le poids ω, pour que l'ordre obtenu privilégie les variables secondaires. Les suivantes peuvent être choisies arbitrairement (néanmoins avec la contrainte que la matrice doit être inversible, pour obtenir un ordre total sur les monômes).

Les séries de Hilbert ont comme indéterminées t_1, t_2, et leurs monômes sont comparés suivant l'ordre du degré lexicographique, avec $t_1 < t_2$.

- $\boxed{\mathbf{k = 1}}$

$$\begin{aligned} Q = {} & {t_1}^7{t_2}^7 + {t_1}^2{t_2}^4 + {t_1}^3{t_2}^3 - {t_1}^4{t_2}^5 + {t_1}^2{t_2}^3 - {t_2}^5{t_1}^3 + {t_1}^4{t_2}^2 - {t_1}^5{t_2}^4 \\ & + \underline{{t_2}^2{t_1}^3} - {t_1}^4{t_2}^4 - {t_1}^5{t_2}^3 \end{aligned}$$

Son plus petit monôme est ${t_2}^2{t_1}^3$.
On cherche donc une seule relation de multidegré $(3,2)$.
Une partition de vecteur de longueur 4 avec cette somme est :

$$[(1,0)^3(0,2)]$$

$$\begin{aligned} \Psi(6\,\boldsymbol{m}_{[(1,0)^3(0,2)]}) = {} & -9\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{3,0} + \boldsymbol{e}_{0,1}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\boldsymbol{e}_{1,1} - 3\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{1,2} + 3{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{3,0} \\ & + {\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\boldsymbol{e}_{1,2} - {\boldsymbol{e}_{1,0}}^3\boldsymbol{e}_{0,2} - \boldsymbol{e}_{1,0}{\boldsymbol{e}_{1,1}}^2 - 2\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{2,1} \\ & + 4\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{0,2} - {\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{2,0} + 3\underline{\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{2,1}} \end{aligned}$$

$$Q_1 = {t_2}^2{t_1}^3$$

- $\boxed{\mathbf{k=2}}$

$$Q - Q_1 = {t_1}^7{t_2}^7 + {t_1}^2{t_2}^4 + {t_1}^3{t_2}^3 - {t_1}^4{t_2}^5 + \underline{{t_1}^2{t_2}^3} - {t_2}^5{t_1}^3 + {t_1}^4{t_2}^2 - {t_1}^5{t_2}^4 - {t_1}^4{t_2}^4 - {t_1}^5{t_2}^3$$

Son plus petit monôme est ${t_1}^2{t_2}^3$.
On cherche donc une seule relation de multidegré $(2,3)$.
Une partition de vecteur de longueur 4 avec cette somme est $[(1,0)^2(0,1)(0,2)]$.

$$\Psi(2\,\boldsymbol{m}_{[(1,0)^2(0,1)(0,2)]}) = -3\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{0,3} - \boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{2,1} + \frac{1}{3}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{2,1} + {\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\boldsymbol{e}_{0,3} - \frac{1}{3}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^3\boldsymbol{e}_{2,0} - \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_{0,1}{\boldsymbol{e}_{1,1}}^2 - \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{1,2} - \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_{0,1}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\boldsymbol{e}_{0,2} + \frac{4}{3}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{0,2} + \frac{1}{3}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{1,1} + \underline{\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{1,2}}$$

$$Q_2 = {t_2}^2{t_1}^3 - {t_1}^4{t_2}^4 + {t_1}^2{t_2}^3$$

- $\boxed{\mathbf{k=3}}$

$$Q-Q_2 = {t_1}^7{t_2}^7 + {t_1}^2{t_2}^4 + {t_1}^3{t_2}^3 - {t_1}^4{t_2}^5 - {t_2}^5{t_1}^3 + \underline{{t_1}^4{t_2}^2} - {t_1}^5{t_2}^4 - {t_1}^5{t_2}^3$$

Son plus petit monôme est ${t_1}^4{t_2}^2$.
On cherche donc une seule relation de multidegré $(4,2)$.
Une partition de vecteur de longueur 4 avec cette somme est $[(1,0)^3(1,2)]$.

$$\Psi(6\,\boldsymbol{m}_{[(1,0)^3(1,2)]}) = -\frac{2}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{1,1} - \frac{6}{5}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{3,0} - \frac{21}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{3,0} + \frac{14}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{0,2} - \frac{11}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{1,2} + \frac{18}{5}\boldsymbol{e}_{1,2}\boldsymbol{e}_{3,0} + \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_{2,0}{\boldsymbol{e}_{1,1}}^2 + \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{2,1} + \frac{2}{5}{\boldsymbol{e}_{2,0}}^2{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2 - \frac{8}{5}{\boldsymbol{e}_{2,0}}^2\boldsymbol{e}_{0,2} - \frac{6}{5}{\boldsymbol{e}_{2,1}}^2 + \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^3\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{1,1} - \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\boldsymbol{e}_{2,0}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2 - \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^4\boldsymbol{e}_{0,2} + \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^3\boldsymbol{e}_{1,2} - \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2{\boldsymbol{e}_{1,1}}^2 - \frac{6}{5}\boldsymbol{e}_{0,1}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\boldsymbol{e}_{2,1} + \frac{9}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{2,1} + \frac{9}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{3,0}$$

Il faut la réduire modulo $\Psi(6\,\boldsymbol{m}_{[(1,0)^3(1,2)]})$, ce qui donne :

$$\underline{-\frac{6}{5}{\boldsymbol{e}_{2,1}}^2} + \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_{2,0}{\boldsymbol{e}_{1,1}}^2 + \frac{18}{5}\boldsymbol{e}_{1,2}\boldsymbol{e}_{3,0} - \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{1,2} + \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{2,1} - \frac{6}{5}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{3,0} - \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{1,1} - \frac{8}{5}{\boldsymbol{e}_{2,0}}^2\boldsymbol{e}_{0,2} + \frac{2}{5}{\boldsymbol{e}_{2,0}}^2{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2 + \frac{6}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{3,0} + \frac{2}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{0,2}$$

$$Q_3 = {t_2}^2{t_1}^3 - {t_1}^4{t_2}^4 + {t_1}^2{t_2}^3 - {t_1}^5{t_2}^3 + {t_1}^4{t_2}^2$$

- $\boxed{\mathbf{k=4}}$

$$Q - Q_3 = {t_1}^7{t_2}^7 + {t_1}^2{t_2}^4 + \underline{{t_1}^3{t_2}^3} - {t_1}^4{t_2}^5 - {t_2}^5{t_1}^3 - {t_1}^5{t_2}^4$$

Son plus petit monôme est ${t_1}^3{t_2}^3$.
On cherche donc une seule relation de multidegré $(3,3)$.
Une partition de vecteur de longueur 4 avec cette somme est $[(1,0)^3(0,3)]$.

$$\begin{aligned}\Psi(6\,\boldsymbol{m}_{[(1,0)^3(0,3)]}) = {} & \frac{81}{5}\boldsymbol{e}_{3,0}\boldsymbol{e}_{0,3} - \frac{27}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{0,3} - \frac{12}{5}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{2,0} \\ & + \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{1,1} + \frac{36}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{2,0} + \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{2,0} \\ & - \frac{12}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{0,1}{\boldsymbol{e}_{1,1}}^2 - \frac{9}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^3\boldsymbol{e}_{2,0} + \frac{9}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{1,1} + \frac{3}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{2,1} \\ & - \frac{12}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{2,1} - \frac{72}{5}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{3,0} - \frac{9}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^3\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{0,2} + \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{1,2} \\ & - \frac{12}{5}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{1,2} - \frac{9}{5}\boldsymbol{e}_{2,1}\boldsymbol{e}_{1,2} + \frac{21}{5}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^3\boldsymbol{e}_{3,0} + \frac{6}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^3\boldsymbol{e}_{0,3} + \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{1,1}}^3 \\ & + \frac{3}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{1,2} + \frac{18}{5}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{2,1}\end{aligned}$$

Cette relation se réduit *modulo* $\Psi(6\,\boldsymbol{m}_{[(1,0)^3(0,2)]})$ et $\Psi(2\,\boldsymbol{m}_{[(1,0)^2(0,1)(0,2)]})$ en :

$$\begin{aligned} & \underline{-\frac{9}{5}\boldsymbol{e}_{2,1}\boldsymbol{e}_{1,2}} + \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{1,1}}^3 - \boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{0,1}{\boldsymbol{e}_{1,1}}^2 + \frac{6}{5}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{1,2} - \frac{1}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{1,2} \\ & + \frac{6}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{2,1} - \frac{1}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{2,1} - \frac{12}{5}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{2,0} + \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{2,0} \\ & + \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{1,1} + \frac{2}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{1,1} + \frac{81}{5}\boldsymbol{e}_{3,0}\boldsymbol{e}_{0,3} - \frac{18}{5}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{3,0} \\ & + \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^3\boldsymbol{e}_{3,0} - \frac{18}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{0,3} + \frac{8}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{2,0} - \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^3\boldsymbol{e}_{2,0} \\ & + \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^3\boldsymbol{e}_{0,3} - \frac{2}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^3\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{0,2}\end{aligned}$$

$$Q_4 = {t_2}^2{t_1}^3 - 2{t_1}^4{t_2}^4 + {t_1}^2{t_2}^3 - {t_1}^5{t_2}^3 + {t_1}^4{t_2}^2 + {t_1}^6{t_2}^5 - {t_1}^5{t_2}^4 + {t_1}^3{t_2}^3$$

- $\boxed{\mathbf{k=5}}$

$$Q - Q_4 = {t_1}^7{t_2}^7 + \underline{{t_1}^2{t_2}^4} - {t_1}^4{t_2}^5 - {t_2}^5{t_1}^3 + {t_1}^4{t_2}^4 - {t_1}^6{t_2}^5$$

Son plus petit monôme est ${t_1}^2{t_2}^4$.
On cherche donc une seule relation de multidegré $(2,4)$.

Une partition de vecteur de longueur 4 avec cette somme est $[(1,0)^2(0,1)(0,3)]$.

$$\begin{aligned}\Psi(2\,\boldsymbol{m}_{[(1,0)^2(0,1)(0,3)]}) &= -\frac{6}{5}{\boldsymbol{e}_{1,2}}^2 + \frac{18}{5}\boldsymbol{e}_{0,3}\boldsymbol{e}_{2,1} - \frac{8}{5}{\boldsymbol{e}_{0,2}}^2\boldsymbol{e}_{2,0} + \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_{0,2}{\boldsymbol{e}_{1,1}}^2\\
&+ \frac{14}{5}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{2,0} - \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{1,1} + \frac{2}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2{\boldsymbol{e}_{0,2}}^2 - \frac{11}{5}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{2,1}\\
&+ \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{1,2} - \frac{6}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{0,3} - \frac{21}{5}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{0,3} + \frac{3}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^3\boldsymbol{e}_{1,1}\\
&- \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{0,2} - \frac{6}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{1,2} + \frac{9}{5}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{1,2} + \frac{9}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{0,3}\\
&+ \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^3\boldsymbol{e}_{2,1} - \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2{\boldsymbol{e}_{1,1}}^2 - \frac{3}{5}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^4\boldsymbol{e}_{2,0}\end{aligned}$$

Elle se réduit modulo $\Psi(2\,\boldsymbol{m}_{[(1,0)^2(0,1)(0,2)]})$ en :

$$\begin{aligned}&-\underline{\frac{6}{5}{\boldsymbol{e}_{1,2}}^2} + \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_{0,2}{\boldsymbol{e}_{1,1}}^2 + \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{1,2} + \frac{18}{5}\boldsymbol{e}_{0,3}\boldsymbol{e}_{2,1} - \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{2,1}\\
&\quad - \frac{6}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{0,3} - \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_{1,0}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{1,1} - \frac{8}{5}{\boldsymbol{e}_{0,2}}^2\boldsymbol{e}_{2,0} + \frac{6}{5}\boldsymbol{e}_{0,1}\boldsymbol{e}_{2,0}\boldsymbol{e}_{0,3}\\
&\quad + \frac{2}{5}{\boldsymbol{e}_{0,1}}^2\boldsymbol{e}_{0,2}\boldsymbol{e}_{2,0} + \frac{2}{5}{\boldsymbol{e}_{1,0}}^2{\boldsymbol{e}_{0,2}}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_5 &= {t_2}^2{t_1}^3 - 2{t_1}^4{t_2}^4 + {t_1}^2{t_2}^3 - {t_1}^5{t_2}^3 + {t_1}^4{t_2}^2 + {t_1}^6{t_2}^5 - {t_1}^5{t_2}^4 + {t_1}^3{t_2}^3\\
&+ {t_1}^5{t_2}^6 - {t_2}^5{t_1}^3 - {t_1}^4{t_2}^5 + {t_1}^2{t_2}^4\end{aligned}$$

- $\boxed{\mathbf{k=6}}$

$$Q - Q_5 = {t_1}^7{t_2}^7 + \underline{{t_1}^4{t_2}^4} - {t_1}^6{t_2}^5 - {t_1}^5{t_2}^6$$

Son plus petit monôme est ${t_1}^4{t_2}^4$.
On cherche donc une seule relation de multidegré $(4,4)$.
Une partition de vecteur de longueur 4 avec cette somme est $[(1,0)^3(1,4)]$.

$$\begin{aligned}&\Psi(6\,\boldsymbol{m}_{[(1,0)^3(1,4)]}) =\\
&\qquad \frac{48}{35}\boldsymbol{e}_{2,1}\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{1,2} - \frac{6}{35}{\boldsymbol{e}_{1,1}}^4\\
&\qquad + \ldots (52 \textit{ termes non-purement secondaires})\end{aligned}$$

On la réduit modulo toutes les relations précédentes, ce qui donne :

$$-\frac{6}{35}{\boldsymbol{e}_{1,1}}^4 + \ldots \ (41 \textit{ termes non-purement secondaires})$$

On trouve que $Q_6 = Q$, l'algorithme est donc terminé.
Les termes dominants de la base de Gröbner réduite obtenue sont :

$$\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{2,1},\quad \boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{1,2},\quad \boldsymbol{e}_{2,1}^2,\quad \boldsymbol{e}_{1,2}^2,\quad \boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{2,1}\boldsymbol{e}_{1,2},\quad \boldsymbol{e}_{1,1}^4$$

Une base de $\mathfrak{J}_3^2(\mathbb{Q})$ sur $\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q})$ est donnée par la famille des monômes "sous l'escalier" :

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_3^2(\mathbb{Q}) = \mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) &\oplus e_{1,1}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{1,1}^2\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q})\\ &\oplus e_{1,1}^3\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{2,1}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{1,2}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q})\end{aligned}$$

Un choix d'un autre ordre peut donner une décomposition différente. Par exemple, pour l'ordre monomial défini par la matrice :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alors la base de Gröbner réduite calculée par l'algorithme a seulement cinq termes :

$\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{2,1} + 10\,$*termes non purement secondaires*	multidegré $(3,2)$
$\boldsymbol{e}_{1,1}\boldsymbol{e}_{1,2} + 10\,$*termes non purement secondaires*	multidegré $(2,3)$
$\boldsymbol{e}_{2,1}^2 + 10\,$*termes non purement secondaires*	multidegré $(4,2)$
$\boldsymbol{e}_{1,2}^2 + 10\,$*termes non purement secondaires*	multidegré $(2,4)$
$\underline{\boldsymbol{e}_{1,1}^3} - 3\,\boldsymbol{e}_{2,1}\boldsymbol{e}_{1,2} + 17\,$*termes non purement secondaires*	multidegré $(3,3)$

qui donne lieu à la décomposition de Hironaka :

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_3^2(\mathbb{Q}) = \mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) &\oplus e_{1,1}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{1,1}^2\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q})\\ &\oplus e_{1,2}e_{2,1}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{2,1}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q}) \oplus e_{1,2}\,\mathcal{T}_3^2(\mathbb{Q})\end{aligned}$$

2.3 Résultats

Nous avons implémenté l'algorithme de calcul des relations, et nous présentons ici les résultats obtenus.

Précisons l'ordre monomial choisi (rappelons qu'il suffit de le préciser sans tenir compte des variables primaires). On a choisi d'ordonner les variables secondaires ainsi : $\boldsymbol{e}_\alpha < \boldsymbol{e}_\beta$ si $|\alpha| < |\beta|$ ou si $|\alpha| = |\beta|$ et $\alpha < \beta$ dans l'ordre lexicographique.

Ensuite l'ordre monomial est construit en utilisant le poids défini par (2.1) : pour comparer deux monômes on compare d'abord leurs poids ; en cas d'égalité on compare les poids des monômes obtenus en oubliant la plus petite des variables ; s'il y a a nouveau égalité on compare les poids des monômes obtenus en oubliant les deux plus petites variables, et ainsi de suite.

Dans chaque cas nous avons précisé la dimension de la variété définie (nr) et la codimension dans l'espace ambiant. Le nombre de variables en jeu est donc Dimension + Codimension.

n=2,r=2

- Nombre de relations : 1
- Temps de calcul : 0,3 secondes
- Taille du fichier résultat : 0,8 Ko
- Dimension : 4
- Codimension : 1

n=3,r=2

- Nombre de relations : 5
- Temps de calcul : 1,3 secondes
- Taille du fichier résultat : 2,6 Ko
- Dimension : 6
- Codimension : 3

n=4,r=2

- Nombre de relations : 23
- Temps de calcul : 97 secondes
- Taille du fichier résultat : 38 Ko
- Dimension : 8
- Codimension : 6

n=5,r=2

- Nombre de relations : 116
- Temps de calcul : 1 816 210 secondes (env. 21 jours)
- Taille du fichier résultat : 1 Mo
- Dimension : 10
- Codimension : 45

n=2,r=3

- Nombre de relations : 6
- Temps de calcul : 1,1 seconde
- Taille du fichier résultat : 1,5 Ko
- Dimension : 6
- Codimension : 3

n=3,r=3

- Nombre de relations : 54
- Temps de calcul : 2066 secondes (34 min 26 s)
- Taille du fichier résultat : 41 Ko
- Dimension : 9
- Codimension : 10

Tous les calculs ont été faits sur une station de travail *Sun* munie d'un processeur *sparc* v9 248 Mhz, hormis le calcul du cas $n = 5, r = 2$. Ce dernier calcul a été effectué sur une machine *giulia* de l'*U.M.S. Médicis*, muni d'un processeur *Intel-Pentium III* de fréquence 933 Mhz.

Remarque : Comme indiqué après la preuve du théorème 2.1, notre algorithme n'est valable qu'en caractéristique nulle. Néanmoins, examinant les résultats des exécutions présentées ci-dessus, nous avons observé que, chaque polynôme de la base de Gröbner étant normalisé (le coefficient dominant pour l'ordre monomial choisi vaut 1), aucun facteur premier $k > n$ n'apparaît en dénominateur.

Par suite, ces relations restent valables dans tout $\mathfrak{I}_n^r(A)$ pour A anneau de base dans lequel $n!$ est inversible. Elles forment encore une base de Gröbner de l'idéal qu'elles engendrent. Compte tenu de la proposition 1.3 et du théorème 1.19, cet idéal est donc encore l'idéal de toutes les relations. $\boxdot$

2.4 Calcul des relations entre les p

On peut copier l'algorithme de calcul des relations entre les polynômes multisymétriques élémentaires $e \in \mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$ pour obtenir un algorithme de calcul des relations entre les sommes de puissances multisymétriques $p \in \mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$. Il suffit de savoir exprimer les $\Psi(\boldsymbol{m}_\mathfrak{p})$ pour $\ell_\mathfrak{p} = n + 1$ en fonction des premières sommes de puissances, ce qui se fait facilement à partir des expressions des $\Psi(\boldsymbol{m}_\mathfrak{p})$ en fonction des élémentaires.

Une autre façon de faire est de déduire de la base de Gröbner de l'idéal des relations entre les e une base de Gröbner de l'idéal des relations entre les p, simplement en y remplaçant les $\boldsymbol{e}$ par leurs expressions en les $\boldsymbol{p}$.

C'est possible lorsque l'ordre $\preceq$ respecte la condition suivante :

Condition $\star$: *Soient $\boldsymbol{e}_\mathfrak{p}$ et $\boldsymbol{e}_\mathfrak{q}$ deux monômes purement secondaires en les $\boldsymbol{e}$. Si $\ell_\mathfrak{p} < \ell_\mathfrak{q}$ alors $\boldsymbol{e}_\mathfrak{p} \succeq \boldsymbol{e}_\mathfrak{q}$.*

En effet, supposons cette condition respectée. Considérons d'une part l'algèbre :

$$B_n^r = \mathbb{Q}[\{\boldsymbol{e}_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}^r, 1 \le |\alpha| \le n\}]$$

dans laquelle on cherche les relations entre les $e_\alpha \in \mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$, et d'autre part l'algèbre :

$$C_n^r = \mathbb{Q}[\{\boldsymbol{p}_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}^r, 1 \le |\alpha| \le n\}]$$

dans laquelle on cherche les relations entre les $p_\alpha \in \mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})$. Ces algèbres sont toutes les deux considérées comme des $\mathcal{T}_n^r(\mathbb{Q})$-algèbres de polynômes. L'algèbre B est munie de l'ordre monomial $\preceq$. On munit l'algèbre C de l'ordre monomial correspondant :

$$\boldsymbol{p}_\mathfrak{p} \preceq \boldsymbol{p}_\mathfrak{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{e}_\mathfrak{p} \preceq \boldsymbol{e}_\mathfrak{q}$$

Rappelons que les formules (1.15) et (1.16), qui donnent une expression des polynômes multisymétriques élémentaires en fonction des sommes de puissances, et réciproquement, sont valables dans l'algèbre de MacMahon $\mathfrak{M}^r(\mathbb{Q})$, où les polynômes multisymétriques élémentaires sont algébriquement indépendants, ainsi que les sommes de puissances multisymétriques. Par conséquent on peut appliquer ces formules aux variables $\mathbf{e}_\alpha$ et $\mathbf{p}_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^r, |\alpha| \leq n$, obtenant un morphisme de B_n^r dans C_n^r caractérisé par :

$$\forall \alpha, \quad (-1)^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \mapsto \sum_{\mathfrak{p} \vdash \alpha} \frac{(-1)^{\ell_\mathfrak{p}}}{\mu_\mathfrak{p}!} \boldsymbol{q}_\mathfrak{p}$$

où $\boldsymbol{q}_\beta = \frac{1}{|\beta|}\binom{|\beta|}{\beta}\boldsymbol{p}_\beta$, et $\boldsymbol{q}_\mathfrak{q}$ est produit de termes $\boldsymbol{q}_\beta$. De même, on obtient un morphisme de C_n^r dans B_n^r, caractérisé par :

$$\forall \alpha, \quad (-1)^{|\alpha|} \boldsymbol{q}_\alpha \mapsto \sum_{\mathfrak{p} \vdash \alpha} \frac{(\ell_\mathfrak{p} - 1)!}{\mu_\mathfrak{p}!} (-1)^{\ell_\mathfrak{p}} \boldsymbol{e}_\mathfrak{p}$$

et ces deux morphismes sont réciproques l'un de l'autre.

Il est clair que la condition $\star$ fait que cet isomorphisme entre B_n^r et C_n^r préserve l'ordre monomial, au sens suivant. Pour toute partition de vecteur $\mathfrak{p}$:

$$(-1)^{|s(\mathfrak{p})|} \boldsymbol{e}_\mathfrak{p} \mapsto (-1)^{\ell_\mathfrak{p}} \boldsymbol{q}_\mathfrak{p} + \sum_{\ell_\mathfrak{q} > \ell_\mathfrak{p}} \bullet \boldsymbol{q}_\mathfrak{q}$$

où les $\bullet$ sont des scalaires, et réciproquement :

$$(-1)^{|s(\mathfrak{p})|} \boldsymbol{q}_\mathfrak{p} \mapsto (-1)^{\ell_\mathfrak{p}} \boldsymbol{e}_\mathfrak{p} + \sum_{\ell_\mathfrak{q} > \ell_\mathfrak{p}} \bullet \boldsymbol{e}_\mathfrak{q}$$

On en déduit que cet isomorphisme transforme une base de Gröbner d'un idéal de B_n^r en une base de Gröbner de l'idéal correspondant dans C_n^r (le problème général de l'étude du comportement des bases de Gröbner sous l'action des morphismes d'algèbres de polynômes est étudié dans [35]).

2.5 Le cas $n = 2$

Le cas $n = 2$ (r quelconque) est particulièrement simple. Dans cette section, nous présentons explicitement une base de Gröbner de l'idéal des relations entre fonctions élémentaires.

Nous travaillerons dans $\mathfrak{I}_2^r(\mathbb{Q})$, avec r indéterminé. Ainsi exceptionnellement dans cette section, $e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ pourra signifier $e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0}$ ou $e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,0}$ *etc...* suivant les valeurs de r. Par exemple $e_{1,1}$ pourra représenter $e_{1,1} \in \mathfrak{I}_2^2(\mathbb{Q})$, ou $e_{1,1,0} \in \mathfrak{I}_2^3(\mathbb{Q})$, *etc...*

Les polynômes multisymétriques élémentaires primaires sont donc les e_{ξ_i} et les $e_{2\xi_i}$ pour $i \in \{1, \ldots, r\}$. Les polynômes multisymétriques élémentaires secondaires sont les $e_{\xi_i + \xi_j}$ pour $1 \leq i < j \leq r$.

Rappelons qu'on a déterminé que pour $n = 2, r = 2$ il y a une seule relation :

$$e_{1,1}^2 + e_{0,2}e_{1,0}^2 + e_{2,0}e_{0,1}^2 - e_{1,1}e_{1,0}e_{0,1} - 4e_{2,0}e_{0,2} = 0 \tag{2.4}$$

Nous allons déduire de cette relation une base de Gröbner de l'idéal $\mathcal{R}el_2^r$.

Tout d'abord, de 2.4, nous déduisons par permutation des coordonnées $1, \ldots, r$, des relations que nous appelons *relations de type* $e_{1,1}^2$, au nombre de $r(r-1)/2$.

Pour dériver les autres relations nous avons besoin d'introduire des opérateurs de polarisation (liés au processus de polarisation déjà rencontré dans le chapitre 1, voir A). Pour $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ il s'agit de l'endomorphisme de $\mathfrak{I}_n^r$ défini par :

$$D_{i,j} = \sum_x x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où dans la somme x parcourt tout l'alphabet $a, b, \ldots, z$.

Proposition 2.5 *On a :*

$$D_{i,j}(e_\alpha) = (\alpha_i + 1)e_{\alpha+\xi_i-\xi_j}$$

(avec la convention que $e_\alpha = 0$ si α a des coordonnées négatives).

Preuve : Soit la série génératrice des e_α :

$$E_r(\mathbf{t}) = \prod_x (1 + x_1t_1 + \cdots + x_rt_r) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r} e_\alpha \mathbf{t}^\alpha$$

Alors :

$$D_{ij}(E_r(\mathbf{t})) = E_r(\mathbf{t}) \cdot \sum_x \frac{x_it_j}{1 + x_1t_1 + \ldots + x_rt_r}$$

Introduisons l'opérateur différentiel ∂_{ji}, défini sur $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q})[t_1, \ldots, t_r]$ par :

$$\begin{array}{l} \partial_{ji}(t_i) = t_j \\ \partial_{ji}(t_k) = 0 \text{ si } k \neq i \\ \partial_{ji}(f) = 0 \text{ pour } f \in \mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Q}) \end{array}$$

Alors :

$$\partial_{ji}(E_r(\mathbf{t})) = E_r(\mathbf{t}) \cdot \sum_x \frac{x_it_j}{1 + x_1t_1 + \ldots + x_rt_r}$$

Donc $D_{ij}(E_r(\mathbf{t})) = \partial_{ji}(E_r(\mathbf{t}))$. Par ailleurs :

$$\partial_{ji}(E_r(\mathbf{t})) = \sum_\alpha e_\alpha \alpha_i \mathbf{t}^{\alpha-\xi_i+\xi_j}$$

En posant $\beta = \alpha - \xi_i + \xi_j$ il vient :

$$\partial_{ji}(E_r(\mathbf{t})) = \sum_{\beta} e_{\beta+\xi_i-\xi_j}(\beta_i + 1)\mathbf{t}^{\beta}$$

d'où le résultat. ∎

Appliquons l'opérateur $D_{3,2}$ à la relation (2.4). Il vient la nouvelle relation :

$$\begin{aligned} 2e_{1,1,0}e_{1,0,1} + e_{0,1,1}e_{1,0,0}^2 + 2e_{2,0,0}e_{0,1,0}e_{0,0,1} \\ - e_{1,0,1}e_{1,0,0}e_{0,1,0} - e_{1,1,0}e_{1,0,0}e_{0,0,1} - 4e_{2,0,0}e_{0,1,1} = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Des relations similaires, au nombre de $r(r-1)(r-2)/2$, sont obtenues par permutation des coordonnées $\{1, \ldots, r\}$. Nous appelons ces relations les *relations de type* $e_{1,1,0}e_{1,0,1}$.

Appliquons l'opérateur $D_{4,1}$ à la relation (2.5). Il vient la nouvelle relation :

$$\begin{aligned} 2e_{1,1,0,0}e_{0,0,1,1} + 2e_{1,0,1,0}e_{0,1,0,1} - 4e_{1,0,0,1}e_{0,1,1,0} \\ + 2e_{1,0,0,1}e_{0,1,0,0}e_{0,0,1,0} + 2e_{0,1,1,0}e_{1,0,0,0}e_{0,0,0,1} - e_{1,1,0,0}e_{0,0,0,1}e_{0,0,1,0} \\ - e_{1,0,1,0}e_{0,0,0,1}e_{0,1,0,0} - e_{0,1,0,1}e_{1,0,0,0}e_{0,0,1,0} - e_{0,0,1,1}e_{1,0,0,0}e_{0,1,0,0} = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Par permutation des coordonnées on obtient aussi la relation suivante :

$$\begin{aligned} - 4e_{1,1,0,0}e_{0,0,1,1} + 2e_{1,0,1,0}e_{0,1,0,1} + 2e_{1,0,0,1}e_{0,1,1,0} \\ + 2e_{1,1,0,0}e_{0,0,1,0}e_{0,0,0,1} + 2e_{0,0,1,1}e_{1,0,0,0}e_{0,1,0,0} - e_{1,0,1,0}e_{0,0,0,1}e_{0,1,0,0} \\ - e_{1,0,0,1}e_{0,0,1,0}e_{0,1,0,0} - e_{0,1,1,0}e_{1,0,0,0}e_{0,0,0,1} - e_{0,1,0,1}e_{1,0,0,0}e_{0,0,1,0} = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

En faisant (relation (2.7) – relation (2.6))/3 on obtient :

$$\begin{aligned} - 2e_{1,1,0,0}e_{0,0,1,1} + 2e_{1,0,0,1}e_{0,1,1,0} \\ + e_{1,1,0,0}e_{0,0,1,0}e_{0,0,0,1} + e_{0,0,1,1}e_{1,0,0,0}e_{0,1,0,0} \\ - e_{1,0,0,1}e_{0,0,1,0}e_{0,1,0,0} - e_{0,1,1,0}e_{1,0,0,0}e_{0,0,0,1} = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nous appelons *relations de type* $e_{1,0,0,1}e_{0,1,1,0}$ les relations obtenues de celles-ci en choisissant $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq r$ et en échangeant les coordonnées 1 avec i_1, 2 avec i_2, 3 avec i_3 et 4 avec i_4.

En échangeant les coordonnées 1 et 2 dans 2.8 il vient :

$$\begin{aligned} - 2e_{1,1,0,0}e_{0,0,1,1} + 2e_{1,0,1,0}e_{0,1,0,1} \\ + e_{1,1,0,0}e_{0,0,1,0}e_{0,0,0,1} + e_{0,0,1,1}e_{1,0,0,0}e_{0,1,0,0} \\ - e_{1,0,1,0}e_{0,1,0,0}e_{0,0,0,1} - e_{0,1,0,1}e_{1,0,0,0}e_{0,0,1,0} = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

et nous appelons *relations de type* $e_{1,0,1,0}e_{0,1,0,1}$ cles relations obtenues de celles-ci en choisissant $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq r$ et en échangeant les coordonnées 1 avec i_1, 2 avec i_2, 3 avec i_3 et 4 avec i_4.

Toutes ces relations suffisent. Précisément :

Théorème 2.6 *Soit le poids ω (à valeurs dans $\mathbb{N}^2$) défini par :*

$$\begin{aligned}
&\omega(e_{\xi_i}) = (0,0) \\
&\omega(e_{2\xi_i}) = (0,0) \\
&\omega(e_{\xi_i+\xi_j}) = (2, j-i) \textit{ pour } i < j
\end{aligned}$$

Soit $\preceq$ un ordre monomial tel que :

$$\omega(M_1) \leq_{lex} \omega(M_2) \Rightarrow M_1 \leq M_2$$

Soit $\mathcal{G}$ la base de Gröbner réduite, pour $\preceq$, de l'idéal des relations entre les polynômes multisymétriques $e_\alpha \in \mathfrak{I}_n^r(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ désigne un corps dans lequel 2 est inversible.

Si $r \geq 4$: la base $\mathcal{G}$ s'obtient en réunissant les relations de type $e_{1,1}^2$, les relations de type $e_{1,1,0}e_{1,0,1}$, les relations de type $e_{1,0,0,1}e_{0,1,1,0}$ et les relations de type $e_{1,0,1,0}e_{0,1,0,1}$.

Si $r = 3$: idem avec seulement les relations de type $e_{1,1}^2$ et les relations de type $e_{1,1,0}e_{1,0,1}$.

Si $r = 2$: idem avec seulement la relation de type $e_{1,1}^2$

Dans tous les cas, les monômes purement secondaires irréductibles sont les :

$$\boldsymbol{e}_{\xi_{i_1}+\xi_{j_1}} \cdot \boldsymbol{e}_{\xi_{i_2}+\xi_{j_2}} \cdots \boldsymbol{e}_{\xi_{i_k}+\xi_{j_k}}$$

avec $1 \leq i_1 < j_1 < i_2 < j_2 < \cdots < i_k < j_k \leq r$.

Preuve : Faisons la preuve pour le cas $r \geq 4$.

Comme dans le début de ca chapitre, on désigne par $\mathcal{R}el_2^r$ l'idéal des relations entre les polynômes multisymétriques élémentaires, dans l'anneau :

$$B_n^r = \mathbb{Q}[\{\boldsymbol{e}_\alpha | \alpha \in \mathbb{N}^r, 1 \leq |\alpha| \leq n\}]$$

Notons J l'idéal engendré par les relations de première, deuxième, troisième et quatrième espèces. Alors $J \subset I$. Soit K l'idéal monomial engendré par les monômes dominants des relations de type $e_{1,1}^2$, et (si $r > 2$) des relations de type $e_{1,1,0}e_{1,0,1}$, et (si $r > 3$) des relations de type $e_{1,0,0,1}e_{0,1,1,0}$ et des relations de type $e_{1,0,1,0}e_{0,1,0,1}$,

Ce sont les $\boldsymbol{e}_{\xi_i+\xi_j}$ pour $i \neq j$, les $\boldsymbol{e}_{\xi_i+\xi_j}\boldsymbol{e}_{\xi_i+\xi_k}$ pour i, j, k deux-à-deux distincts, les $\boldsymbol{e}_{\xi_{i_1}+\xi_{j_1}}\boldsymbol{e}_{\xi_{i_2}+\xi_{j_2}}$ pour $i_1 < i_2 < j_2 < j_1$ et pour $i_1 < i_2 < j_1 < j_2$. Alors $K \subset \mathrm{in}(J) \subset \mathrm{in}(\mathcal{R}el_n^r)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\dim B_n^r/(K + \mathcal{T}^+B_n^r) &\geq \\
&\dim B_n^r/(\mathrm{in}(J) + \mathcal{T}^+B_n^r) \geq \\
&\qquad \dim B_n^r/(\mathrm{in}(\mathcal{R}el_n^r) + \mathcal{T}^+B_n^r) = 2^{r-1}
\end{aligned}$$

Les images dans $B_n^r/(K + \mathcal{T}^+B_n^r)$ des monômes purement secondaires qui ne sont pas dans K forment une base d'espace vectoriel. Ces monômes sont les :

$$\boldsymbol{e}_{\xi_{i_1}+\xi_{j_1}} \cdot \boldsymbol{e}_{\xi_{i_2}+\xi_{j_2}} \cdots \boldsymbol{e}_{\xi_{i_k}+\xi_{j_k}}$$

pour $1 \leq i_1 < j_1 < i_2 < j_2 < \cdots < i_k < j_k \leq r$. Ils sont donc au nombre de 2^{r-1}. Les inégalités entre dimensions ci-dessus sont donc des égalités. Il vient d'après le corollaire 2.4, d'une part que $J = \mathcal{R}el_n^r$, et d'autre part que K est l'idéal engendré par les termes de tête de tous les éléments de $\mathcal{R}el_n^r$ (ce qui signifie que les relations trouvées forment bien une base de Gröbner). ■

Remarque : Les coefficients des termes dominants dans la base de Gröbner obtenue sont tous 1 ou 2. La proposition 1.3 et le théorème 1.19 nous permettent d'en déduire que cette famille forme encore une base de Gröbner de l'idéal des relations entre les e_α, pour tout anneau de base A dans lequel 2 est inversible. ⊡

Remarque : Les monômes purement secondaires irréductibles sont les invariants secondaires d'une décomposition de Hironaka de $\mathfrak{J}_n^r(\mathbb{K})$ (proposition 2.2). D'après le théorème 2.6, le nombre de ces invariants secondaires en multidegré $\alpha \in \mathbb{N}^r$ est :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \text{ est à coordonnées 0-1, avec un nombre pair de 1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous retrouvons ainsi la formule de Gessel et Garsia dans le cas $n = 2$ (formule (1.22)). ⊡

Chapitre 3

Point de vue géométrique

Dans ce chapitre, nous voyons les polynômes multisymétriques comme des fonctions polynomiales sur certaines variétés algébriques. Ceci permet de résoudre, ou contribuer à la résolution, de problèmes concernant ces variétés.

Quelques notations utilisées dans ce chapitre : par $\mathbb{L}$ on désignera un corps algébriquement clos, de caractéristique quelconque, sauf précision du contraire. Par $\mathcal{V}$ on désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{L}$ de dimension $r+1$, et son dual sera V. Par $\mathbb{P}W$ on se réferera à l'espace projectif des droites d'un espace vectoriel W.

Des rappels d'algèbres multilinéaires sont donnés dans l'annexe A.

3.1 La variété de Chow des multi-ensembles de points de l'espace projectif

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathcal{V}^n$ en permutant les facteurs. L'application régulière $\mathfrak{S}_n$ invariante :

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{V}^n & \to & S^n\mathcal{V} \\ & (v^{(a)}, \ldots, v^{(z)}) & \mapsto & v^{(a)} \cdots v^{(z)} \end{array}$$

induit une application régulière $\mathfrak{S}_n$-invariante de $(\mathbb{P}\mathcal{V})^n$ dans $\mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$. Cette dernière factorise donc en une application régulière injective (le morphisme de Chow) :

$$\widehat{\varphi} : (\mathbb{P}\mathcal{V})^n/\mathfrak{S}_n \to \mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$$

L'image de $\widehat{\varphi}$ est une sous-variété algébrique fermée de l'espace projectif $\mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$. Cette sous-variété est appelée *variété de Chow des multi-ensembles de n points de* $\mathbb{P}\mathcal{V}$. On la notera $Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$. Ses points représentent donc, comme ceux du produit symétrique $(\mathbb{P}\mathcal{V})^n/\mathfrak{S}_n$, les multi-ensembles de longueur n de points de $\mathbb{P}\mathcal{V}$.

L'image de φ est l'ensemble des *éléments décomposables* de $S^n\mathcal{V}$. C'est une sous-variété fermée de $S^n\mathcal{V}$, puisque c'est le cône affine sur $Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$. On note $\mathcal{D}(n, \mathcal{V})$ cette sous-variété de $S^n\mathcal{V}$.

Il est intéressant de considérer $\mathcal{V}$ comme l'espace des formes linéaires sur V. Dans ce cas :

- L'espace affine ambiant $S^n\mathcal{V}$ s'identifie à l'espace des fonctions polynomiales homogènes de degré n sur V (voir l'annexe A).
- La sous-variété $\mathcal{D}(n, \mathcal{V})$ est alors l'ensemble de celles de ces fonctions qui sont produits de facteurs linéaires.
- L'espace projectif ambiant $\mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$ s'identifie à l'espace des diviseurs effectifs de degré n de $\mathbb{P}V$.
- La sous-variété $Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$ correspond alors au sous-ensemble des diviseurs qui sont somme de n hyperplans.

Voici les problèmes que nous allons aborder :

1. Peut-on trouver des équations qui définissent $Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$ comme sous-ensemble de $\mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$? Peut-on trouver toutes les équations ?
2. La bijection régulière du produit symétrique $(\mathbb{P}\mathcal{V})^n/\mathfrak{S}_n$ sur $Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$ est-elle un isomorphisme de variétés ? Autrement dit, sa réciproque est-elle régulière ?
3. Comment se comporte l'application induite par φ entre les anneaux de coordonnées homogènes de $(\mathbb{P}\mathcal{V})^n/\mathfrak{S}_n$ et $Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$?

En introduisant des coordonnées sur l'espace $\mathcal{V}$, les polynômes multisymétriques apparaissent naturellement dans l'étude de ces problèmes.

Soit une base $(t_1, \ldots, t_{r+1})$ de $\mathcal{V}$. Considérons $\boldsymbol{v}$ une famille de n vecteurs de l'espace $\mathcal{V}$: $v^{(a)}, \ldots, v^{(z)}$. Décomposons chacun de ces vecteurs dans la base introduite :

$$v^{(x)} = \sum_{i=1}^{r+1} v_i^{(x)} t_i$$

Alors l'image de cette famille de vecteurs est :

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = \prod_{x \in \{a, \ldots, z\}} \left(v_1^{(x)} t_1 + \ldots + v_{r+1}^{(x)} t_{r+1} \right) \tag{3.1}$$

Comparons avec la composante de degré total maximal dans la série génératrice des polynômes multisymétriques élémentaires de $\mathfrak{I}_n^{r+1}$ (formule (1.1)) :

$$\prod_{x \in \{a, \ldots, z\}} (x_1 t_1 + \ldots + x_{r+1} t_{r+1}) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{r+1}(n)} e_\beta \mathbf{t}^\beta$$

où l'on a utilisé la notation $\mathbb{N}^k(j)$, désignant l'ensemble des $\beta \in \mathbb{N}^k$ avec $|\beta| = j$. Par identification : les coordonnées de $\varphi(\boldsymbol{v})$ dans la base des $\mathbf{t}^\beta$ de $S^n\mathcal{V}$ sont les $e_\beta, (|\beta| = n)$ évaluées suivant $x_i \mapsto v_i^{(x)}$.

Nous pouvons considérer le morphisme d'algèbres φ^* associé à φ, entre les algèbres de coordonnées affines de $\mathcal{V}^n$ et $S^n\mathcal{V}$. L'algèbre de coordonnées affines de $\mathcal{V}^n$ est $S((\mathcal{V}^n)^*) \cong \otimes^n SV$, où $V = \mathcal{V}^*$, le dual de $\mathcal{V}$. Nous avons un isomorphisme :

$$\mathbb{L}[a_1, \ldots, z_{r+1}] \cong \otimes^n SV \tag{3.2}$$

qui envoie les variables $a_i, b_i, \ldots$ sur les fonctions coordonnées sur $\mathcal{V}^n$ associées à la base des $(t_i, 0, \ldots, 0), (0, t_i, 0, \ldots, 0), \ldots$.

L'algèbre de coordonnées affines de $S^n\mathcal{V}$ est $S((S^n\mathcal{V})^*) \cong S(T^n_{sym}V)$ (voir l'annexe A pour cette identification). Introduisons des variables $\boldsymbol{e}_\beta$ (en gras, pour les distinguer des polynômes multisymétriques élémentaires e_β) pour β parcourant $\mathbb{N}^{r+1}(n)$. Nous avons un isomorphisme :

$$\mathbb{L}[\{\boldsymbol{e}_\beta\}_{\beta \in \mathbb{N}^{r+1}(n)}] \cong S(T^n_{sym}V) \tag{3.3}$$

qui envoie les variables $\boldsymbol{e}_\beta$ sur les fonctions coordonnées sur $S^n\mathcal{V}$ associées à la base des $\mathbf{t}^\beta$.

Le morphisme d'algèbres :

$$S(T^n_{sym}V) \xrightarrow{\varphi^*} \otimes^n SV$$

est vu à travers les isomorphismes (3.2) et (3.3) comme le morphisme :

$$\mathbb{L}[\{\boldsymbol{e}_\beta\}_{\beta \in \mathbb{N}^{r+1}(n)}] \longrightarrow \mathbb{L}[a_1, \ldots, z_{r+1}]$$

qui envoie chaque variable $\boldsymbol{e}_\beta$ sur le polynôme multisymétrique élémentaire e_β de même indice. L'algèbre de coordonnées affines de $\mathcal{D}(n, \mathcal{V})$ est l'image de φ^*, elle correspond donc à l'algèbre engendrée par les polynômes multisymétriques élémentaires $e_\beta, |\beta| = n$. Le noyau $\ker \varphi^*$ est l'idéal de $\mathcal{D}(n, \mathcal{V})$ dans $S^n\mathcal{V}$. Il correspond à l'idéal des relations entre les polynômes multisymétriques élémentaires homogènes $e_\beta, |\beta| = n$.

Nous noterons $\mathcal{R}elh^{r+1}_n$ l'ensemble des relations à coefficients rationnels entre les polynômes multisymétriques élémentaires homogènes (c'est un idéal de $\mathbb{Q}[\{\boldsymbol{e}_\beta\}_{\beta \in \mathbb{N}^{r+1}(n)}]$, à distinguer de $\mathcal{R}el^{r+1}_n$, idéal des relations entre les e_β pour $|\beta| \leq n$, étudié dans le chapitre précédent). Il se décrit ainsi : c'est l'idéal de toutes les relations que doivent vérifier les coefficients (dans un corps algébriquement clos de caractéristique nulle) d'un polynôme homogène de degré n en $r+1$ variables pour être un produit de formes linéaires.

Nous faisons pour $\widehat{\varphi}$ le même travail que celui que nous venons de faire pour φ. Pour décrire l'algèbre de coordonnées homogènes de l'espace de départ $(\mathbb{P}\mathcal{V})^n/\mathfrak{S}_n$, nous avons besoin de la définition suivante (due à Dalbec, [21] et [22]) :

Définition 3.1 *Soit A un anneau.*

Notons $\mathfrak{D}^{r+1}_n(A)$ la sous-algèbre de $\mathfrak{J}^{r+1}_n(A)$ engendrée par ceux des éléments f qui vérifient :

$$\exists N, \qquad f(\lambda \cdot a, b, \ldots, z) = \lambda^N f(a, b, \ldots, z)$$

Nous définissons un degré, sur $\mathfrak{D}_n^{r+1}(A)$ en donnant à un élément f qui vérifie la relation ci-dessus le degré N. Ce degré est noté degh, *et la composante de degré N de $\mathfrak{D}_n^{r+1}(A)$ est notée $\mathfrak{D}_n^{r+1}(A)_{\text{degh}=N}$. Nous appelons* polynômes multisymétriques homogènes *les éléments de cette algèbre.*

Cette algèbre est un A-module libre, de base la famille des $m_\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p}$ partition de vecteur de $\mathbb{N}^{r+1}$ de longueur n exactement, avec toutes ses parts de même norme. Le degré de $m_\mathfrak{p}$ est la norme commune de ses parts.

Remarque : Pour une fonction monomiale homogène $m_\mathfrak{p}$, on a la relation suivante entre degré et multidegré :

$$n \cdot \text{degh}(m_\mathfrak{p}) = |\operatorname{mdeg} m_\mathfrak{p}|$$

Ainsi :

$$\mathfrak{D}_n^k(A)_{\text{degh}=N} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^k(k \cdot N)} \mathfrak{D}_n^k(A)_{\text{mdeg}=\alpha}$$

où $\mathfrak{D}_n^k(A)_{\text{mdeg}=\alpha}$ est le sous-espace des éléments de $\mathfrak{D}_n^k(A)$ homogènes pour le multidegré, de multidegré α. En particulier, les fonctions monomiales homogènes de degré 1 sont précisément les polynômes multisymétriques élémentaires homogènes : les e_β avec $|\beta| = n$. $\boxdot$

L'algèbre de coordonnées homogènes de $(\mathbb{P}\mathcal{V})^n/\mathfrak{S}_n$ est $\oplus_N T^n_{sym}(S^N V)$. Elle correspond exactement, *via* l'isomorphisme (3.2), à $\mathfrak{D}_n^{r+1}(\mathbb{L})$.

L'algèbre de coordonnées homogènes de $\mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$ est $S(T^n_{sym}V)$.

Le morphisme d'algèbres graduées :

$$S(T^n_{sym}V) \xrightarrow{\varphi^*} \oplus_N T^n_{sym}(S^N V)$$

induit par φ^* est vu à travers les isomorphismes (3.2) et (3.3) comme le morphisme d'algèbres graduées :

$$\mathbb{L}[\{\boldsymbol{e}_\beta\}_{\beta \in \mathbb{N}^{r+1}(n)}] \to \mathfrak{D}_n^{r+1}(\mathbb{L})$$

qui envoie chaque variable $\boldsymbol{e}_\beta$ sur le polynôme multisymétrique élémentaire e_β de même indice. L'anneau de coordonnées homogènes de $Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$ est encore $\operatorname{Im}\varphi^*$. Il correspond à la sous-algèbre de $\mathfrak{D}_n^{r+1}(\mathbb{L})$ engendrée par les polynômes multisymétriques homogènes e_β.

Dans la suite, nous commencerons par examiner dans des cartes affines l'application $\widehat{\varphi}$. Ceci nous donnera une méthode de calcul des équations de $Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$, et permettra aussi de répondre à la deuxième question (cette application induite est-elle un isomorphisme sur son image ?). Nous comparerons (dans le cas de la caractéristique nulle) les équations que nous avons obtenues à celles données par une autre méthode, la *méthode de Brill*. Pour finir nous examinerons la troisième question (lien entre les anneaux de coordonnées homogènes), ce qui nous amènera à donner une reformulation de la conjecture dite *de Foulkes-Howe* en termes de polynômes multisymétriques.

Notes

- Les polynômes multisymétriques élémentaires de $\mathfrak{D}_n^{r+1}$ apparaissent comme *pullbacks* des fonctions coordonnées dans un morphisme dont l'image est la variété de Chow des multi-ensembles de n points de l'espace projectif.
  Voici un autre objet géométrique lié aux polynômes multisymétriques : les sommes de puissances multisymétriques $p_\beta \in \mathfrak{J}_n^{r+1}$ avec $|\beta| = j$ sont les *pullbacks* des fonctions coordonnées dans un morphisme dont l'image est l'ensemble des sommes de puissances j-ièmes étudié en détail dans [38]. En particulier, les relations entre ces p_β forment l'idéal de cet ensemble.

3.2 L'application $\widehat{\varphi}$ vue dans des cartes affines

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ muni de sa base $t_1, \ldots, t_{r+1}$ (choisie en section 3.1), on considère l'hyperplan affine $\mathbb{H}_1$ des éléments dont la coordonnée associée à t_{r+1} vaut 1. Dans $S^n\mathcal{V}$ muni de la base des $\mathbf{t}^\beta$ on considère l'hyperplan affine $\mathbb{H}_2$ des éléments dont la coordonnée associée à t_{r+1}^n vaut 1. Alors φ envoie $\mathbb{H}_1^n$ dans $\mathbb{H}_2$. Le projeté de $\mathbb{H}_1$ dans $(\mathbb{P}\mathcal{V})^n/\mathfrak{S}_n$ (resp. le projeté de $\mathbb{H}_2$ dans $\mathbb{P}(S\mathcal{V}^n)$) est un ouvert de Zariski que nous notons U_1 (resp. U_2), et on a exactement $\widehat{\varphi}^{-1}(U_2) = U_1$. D'autre part, le groupe $GL(\mathcal{V})$ agit naturellement sur $(\mathbb{P}\mathcal{V})^n/\mathfrak{S}_n$ et $\mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$, et $\widehat{\varphi}$ est équivariante pour ces actions. Or :

Lemme 3.1 *Les ouverts $u(U_2)$, pour u parcourant $GL(\mathcal{V})$, recouvrent $\mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$.*

Preuve : Il revient au même de dire que tout polynôme homogène non-nul, de degré n en $r+1$ variables $t_1, \ldots, t_{r+1}$ peut être transformé en un polynôme avec coefficient de t_{r+1}^n non-nul, par changement linéaire de coordonnées.

Soit donc f un polynôme homogène de degré n non-nul en $t_1, \ldots, t_{r+1}$. Introduisons des variables $y_1, \ldots, y_r$. On a :

$$\begin{aligned} &f(t_1 + y_1 t_{r+1}, \ldots, t_r + y_r t_{r+1}, t_{r+1}) = \\ &\qquad\qquad f(y_1, \ldots, y_r, 1) t_{r+1}^n + \text{ termes de degré plus petit en } t_{r+1} \end{aligned}$$

Comme f est non-nul, il en va de même pour $f(y_1, \ldots, y_r, 1)$, son déshomogénéisé. Comme le corps de base $\mathbb{L}$ est infini (car algébriquement clos), il existe des valeurs de $y_1, \ldots, y_r$ dans $\mathbb{L}$ qui rendent $f(y_1, \ldots, y_r, 1)$ non-nul. ■

Nous voulons déterminer si $\widehat{\varphi}$ est un isomorphisme sur $Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$, son image. Nous savons déjà que c'est une bijection régulière. Il suffit donc de déterminer si sa réciproque est partout régulière. La régularité de cette réciproque en restriction à $U_2 \cap Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$ est bien sûr nécessaire. Elle est aussi suffisante, puisque les $u(U_2)$ (pour u parcourant $GL(\mathcal{V})$) recouvrent $\mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$, et que $\widehat{\varphi}$ est équivariante (donc la régularité en restriction à $U_2 \cap Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$ assurera de la régularité en restriction à chaque $u(U_2) \cap Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$).

Pour traduire ce problème en termes de polynômes multisymétriques, nous retournons au travail en coordonnées.

Introduisons des variables $\boldsymbol{e}_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^r$ avec $1 \leq |\alpha| \leq n$. Pour une variété affine telle que U_2, nous notons $\mathbb{L}[U_2]$ son algèbre de coordonnées affines. Alors on a un isomorphisme :

$$\mathbb{L}[\{\boldsymbol{e}_\alpha\}_{\alpha \in \cup_{i=1}^n \mathbb{N}^r(i)}] \cong \mathbb{L}[U_2] \tag{3.4}$$

obtenu en envoyant chaque variable $\boldsymbol{e}_\alpha$ sur la restriction à $\mathbb{H}_2$ de la fonction coordonnée de $S^n\mathcal{V}$ associée à $t_1^{\alpha_1} \cdots t_r^{\alpha_r} t_{r+1}^{n-|\alpha|}$.

On a aussi un isomorphisme :

$$\mathbb{L}[a_1, \ldots, z_r] \cong \mathbb{L}[\mathbb{H}_1^n]$$

qui envoie les variables $a_i, b_i, \ldots$ sur les restrictions à $\mathbb{H}^n$ des fonctions coordonnées de $\mathcal{V}^n$ associées à $(t_i, 0, \ldots, 0), (0, t_i, 0, \ldots, 0), \ldots$. Il induit un isomorphisme :

$$\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{L}) \cong \mathbb{L}[U_1] \tag{3.5}$$

On a un diagramme commutatif d'algèbres :

$$\begin{array}{ccc} S(T^n_{sym}V) & \xrightarrow{\varphi^*} & \oplus_N T^n_{sym}(S^N V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}[U_2] & \longrightarrow & \mathbb{L}[U_1] \end{array}$$

où les flèches verticales correspondent aux restrictions. Déterminer si $\widehat{\varphi}$ induit un isomorphisme de U_1 sur son image dans U_2 (et donc si $\widehat{\varphi}$ est un isomorphisme) se réduit à déterminer si la flèche $\mathbb{L}[U_2] \to \mathbb{L}[U_1]$ de ce diagramme est surjective.

Via les isomorphismes (3.2) et (3.3), ce diagramme commutatif devient :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}[\{\boldsymbol{e}_\beta\}_{\beta \in \mathbb{N}^{r+1}(n)}] & \longrightarrow & \mathfrak{D}_n^{r+1}(\mathbb{L}) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ \mathbb{L}[\{\boldsymbol{e}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^r(\leq n)}] & \longrightarrow & \mathfrak{I}_n^r(\mathbb{L}) \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est induite par le morphisme de $\mathfrak{I}_n^{r+1}(\mathbb{L})$ dans $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{L})$ obtenu par la déshomogénéisation $x_{r+1} \mapsto 1$ (pour toutes les lettres $x \in \{a, \ldots, z\}$). Elle agit ainsi sur les polynômes multisymétriques élémentaires :

$$\begin{array}{rcll} e_{(0,\ldots,0,n)} & \longmapsto & 1 & \\ e_{(\beta_1,\ldots,\beta_r,\beta_{r+1})} & \longmapsto & e_{(\beta_1,\ldots,\beta_r)} & \text{pour } \beta \neq (0,\ldots,0,n) \end{array}$$

La flèche π est la déshomogénéisation :

$$\pi : \begin{array}{ccc} \boldsymbol{e}_{(0,\ldots,0,n)} & \longmapsto & 1 \\ \boldsymbol{e}_{(\beta_1,\ldots,\beta_r,\beta_{r+1})} & \longmapsto & \boldsymbol{e}_{(\beta_1,\ldots,\beta_r)} \quad \text{pour } \beta \neq (0,\ldots,0,n) \end{array} \tag{3.6}$$

Déterminer si $\widehat{\varphi}$ est un isomorphisme sur son image est donc réduit à déterminer si les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{L})$, question à laquelle répond le théorème 1.19. Il vient ainsi :

Théorème 3.2 *Soit un corps $\mathbb{L}$ algébriquement clos. Soit un espace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension $r+1$ sur $\mathbb{L}$. La bijection régulière induite $\widehat{\varphi}$ de $(\mathbb{P}\mathcal{V})^n/\mathfrak{S}_n$ sur $Chow(n,\mathbb{P}\mathcal{V})$ est un isomorphisme si et seulement si l'on est dans l'un des cas suivants :*

- $\mathbb{L}$ *est de caractéristique nulle.*
- $\mathbb{L}$ *est de caractéristique positive strictement supérieure à n.*
- $(n,r) = (2,2)$ *(deux points du plan).*
- $(n,r) = (3,2)$ *(trois points du plan) avec $\mathbb{L}$ de caractéristique* 2.
- $n = 1$ *(un seul point).*
- $r = 1$ *(un nombre quelconque de points de la droite).*

Notes

- La réduction du problème consistant à déterminer si $\widehat{\varphi}$ est un isomorphisme sur son image au problème de savoir si les polynômes multisymétriques élémentaires engendrent $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{L})$ est due à Amnon Neeman [57].

3.3 Un algorithme pour calculer l'idéal $\mathcal{R}elh_n^{r+1}$

Dans cette section, nous utilisons les remarques de la section précédente pour construire un algorithme calculant une famille génératrice finie de l'idéal $\mathcal{R}elh_n^{r+1}$ des relations à coefficients rationnels entre les polynômes multisymétriques homogènes.

3.3.1 Description de l'algorithme

Soit $\mathbb{L}$ un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{Q}$ et $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension $r+1$ sur $\mathbb{L}$. La sous-variété $Chow(n,P\mathcal{V})$ de $\mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$ est la clôture projective de la sous-variété $\mathbb{H}_2 \cap \mathcal{D}(n,\mathcal{V})$ de l'espace affine $\mathbb{H}_2$.

Via les isomorphismes (3.2) et (3.4), le morphisme de restriction :

$$S(T^n_{sym}V) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{L}[\mathbb{H}_2]$$

induit par le plongement de $\mathbb{H}_2$ dans $\mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$, devient le morphisme π défini par la formule (3.6) et l'idéal de la sous-variété $Chow(n,P\mathcal{V})$ de $\mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$ s'identifie à $\mathbb{L}\otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{R}elh_n^{r+1}$, tandis que l'idéal de la sous-variété $\mathbb{H}_2 \cap \mathcal{D}(n,\mathcal{V})$ de $\mathbb{H}_2$ s'identifie à $\mathbb{L}\otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{R}el_n^r$.

Remarque : Ainsi $\mathcal{R}el_n^r$, l'idéal des relations à coefficients rationnels entre les polynômes multisymétriques élémentaires de $\mathfrak{J}_n^r(\mathbb{Q})$, est aussi l'idéal de toutes les relations que doit vérifier un polynôme de degré au plus n, en r variables, à coefficients dans un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et de coefficient constant égal à 1, pour être produit de polynômes de degré 1. $\boxdot$

Par conséquent, l'idéal $\mathcal{R}elh_n^{r+1}$ se déduit de $\mathcal{R}el_n^r$ par l'homogénéisation suivante : dans chaque $P \in \mathcal{R}el_n^r$ on remplace chaque variable $\boldsymbol{e}_{\alpha_1,\dots,\alpha_r}$ par $\boldsymbol{e}_{(\alpha_1,\dots,\alpha_r,n-|\alpha|)}/\boldsymbol{e}_{(0,\dots,0,n)}$ et on chasse le dénominateur en multipliant par la plus petite puissance suffisante de $\boldsymbol{e}_{(0,\dots,0,n)}$.

De façon générale, l'homogénéisation d'une famille génératrice d'un idéal ne donne pas une famille génératrice de l'idéal des homogénéisés. On a néanmoins le cas particulier suivant :

Proposition 3.3 *Soit $I \subset \mathbb{L}[X_1,\dots,X_k]$ l'idéal d'une variété affine, $J \subset \mathbb{L}[X_0,X_1,\dots,X_k]$ l'idéal de sa clôture projective.*

Soit $\preceq$ un ordre monomial pour les monômes en $X_1,\dots,X_k$ compatible avec le degré total (si $\deg \mathbf{X}^\alpha < \deg \mathbf{X}^\beta$ alors $\mathbf{X}^\alpha \preceq \mathbf{X}^\beta$).

Alors en homogénéisant une base de Gröbner (resp. base de Gröbner réduite) de I pour cet ordre on obtient une base de Gröbner (resp. base de Gröbner réduite) de J , pour tout ordre $\preceq'$ étendant $\preceq$ et tel que deux monômes en $X_0,\dots,X_k$ de même degré total soient dans le même ordre relatif pour $\preceq'$ que les monômes obtenus en remplaçant X_0 par 1 pour $\preceq$.

Preuve : Nous renvoyons le lecteur intéressé à, par exemple, l'ouvrage de Cox, Little, O'Shea ([18], chapitre 8, paragraphe 4, thórème 4). $\blacksquare$

Pour obtenir une famille génératrice de $\mathcal{R}elh_n^{r+1}$ nous allons donc calculer une base de Gröbner de $\mathcal{R}el_n^r$ pour un ordre compatible au degré total. L'ordre $\preceq_1$ utilisé dans l'algorithme du chapitre 2 n'est pas compatible au degré total. Nous utiliserons une *marche de Gröbner* (voir [17]) : un algorithme permettant de calculer une base de Gröbner d'un idéal, pour un certain ordre monomial $\preceq_2$, à partir d'une base de Gröbner déjà connue du même idéal, pour un autre ordre monomial $\preceq_1$, en évitant les calculs très coûteux de l'algorithme de Buchberger.

Algorithme pour calculer $\mathcal{R}elh_n^{r+1}$

- en entrée : n, r, deux ordres monomiaux $\preceq_1, \preceq_2$ sur les monômes en les variables $\boldsymbol{e}_\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^r, 0 < |\alpha| \leq n$, avec $\preceq_1$ privilégiant les variables secondaires (définition 2.1) et $\preceq_2$ compatible au degré total.
- en sortie : la base de Gröbner réduite $\mathcal{B}$ de l'idéal $\mathcal{R}elh_n^{r+1}$, pour l'ordre $\preceq$ sur les monômes en les variables $\boldsymbol{e}_\beta, \beta \in \mathbb{N}^{r+1}, |\beta| = n$ défini par : $M_1 \preceq M_2$ ssi $M'_1 \preceq_2 M'_2$, les monômes M'_i étant ceux obtenus des M_i par la déshomogénéisation π définie par la formule (3.6).

- algorithme :
  - Appliquer l'algorithme du chapitre 2 avec comme paramètres n, r et $\preceq_2$. Il renvoie la base de Gröbner réduite $\mathcal{B}_1$ de l'idéal $\mathcal{R}el_n^r$ pour $\preceq_1$.
  - Effectuer une *marche de Gröbner* calculant la base de Gröbner réduite $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{R}el_n^r$ pour $\preceq_2$ à partir de la donnée de $\mathcal{B}_1$ et $\preceq_1$.
  - Construire $\mathcal{B}$ en remplaçant dans $\mathcal{B}_2$ chaque variable $\boldsymbol{e}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}$ par $\boldsymbol{e}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,n-|\alpha|)}$ puis en chassant le dénominateur en multipliant par la plus petite puissance suffisante de la variable $\boldsymbol{e}_{(0,\ldots,0,n)}$.

3.3.2 Résultats des calculs

Nous avons pu calculer, dans les cas suivants, une base de Gröbner de l'idéal $\mathcal{R}elh_n^{r+1}$, en suivant l'algorithme ci-dessus. Nous avons utilisé le logiciel de calcul formel *Magma* (version $V2.7-3$) [53] et sa fonction `ChangeOrder` pour effectuer la marche de Gröbner. Ces calculs ont été effectués sur une station de travail *Sun* munie d'un processeur *sparc v9* 248 Mhz.

Nous avons aussi calculé dans chaque cas la série de Hilbert de l'anneau de coordonnées homogènes de $Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$.

Nous présentons ces résultats. Nous avons utilisé la notation suivante pour dénombrer les relations : $10^{(3)}2^{(4)}$, par exemple, signifie 10 relations de degré 3 et 2 relations de degré 4.

n=2,r=2

- Nombre de relations : $1^{(3)}$
- Temps de la marche de Gröbner : 0,04 s
- Taille du fichier résultat : 146 o
- Dimension de la variété de Chow : 4
- Codimension : 1
- Série de Hilbert :

$$\frac{1+t+t^2}{(1-t)^5}$$

n=3,r=2

- Nombre de relations : $35^{(4)}$
- Temps de la marche de Gröbner : 0,2 s
- Taille du fichier résultat : 6,2 Ko
- Dimension de la variété de Chow : 6
- Codimension : 3
- Série de Hilbert :

$$\frac{1+3t+6t^2+10t^3-20t^4+35t^5-35t^6+21t^7-7t^8+t^9}{(1-t)^7}$$

n=4,r=2

- Nombre de relations : $1002^{(5)}120^{(6)}12^{(7)}5^{(8)}$
- Temps de la marche de Gröbner : 2821 s
- Taille du fichier résultat : 846 Ko
- Dimension de la variété de Chow : 8
- Codimension : 6
- Série de Hilbert :
$$\frac{F(t)}{(1-t)^9}$$
avec :

$$F(t) = 1 + 6t + 21t^2 + 56t^3 + 126t^4 - 750t^5 + 2185t^6 - 3654t^7 \\ + 3906t^8 - 2724t^8 + 1206t^{10} - 309t^{11} + 35t^{12}$$

n=2,r=3

- Nombre de relations : $10^{(3)}2^{(4)}$
- Temps de la marche de Gröbner : 0,07 s
- Taille du fichier résultat : 1,3 Ko
- Dimension de la variété de Chow : 6
- Codimension : 3
- Série de Hilbert :
$$\frac{1+3t+6t^2}{(1-t)^7}$$

n=3,r=3

- Nombre de relations : $1085^{(4)}354^{(5)}261^{(6)}52^{(7)}23^{(8)}4^{(9)}$
- Temps de la marche de Gröbner : 22773 s
- Taille du fichier résultat : 1443 Ko
- Dimension de la variété de Chow : 9
- Codimension : 10
- Série de Hilbert :
$$\frac{F(t)}{(1-t)^{10}}$$
avec :

$$F(t) = 1 + 10t + 55t^2 + 220t^3 - 370t^4 + 1204t^5 - 2100t^6 + 2520t^7 \\ - 2100t^8 + 1200t^9 - 450t^{10} + 100t^{11} - 10t^{12}$$

Des familles génératrices de $\mathcal{R}elh_n^{r+1}$ n'avaient jamais été calculées – à notre connaissance – dans le cas $n = 3, r = 3$ (cubiques en quatre variables) ni dans le cas $n = 4, r = 2$ (quartiques ternaires).

3.4 Les équations de Brill

Nous présentons la réponse de Brill (présentée par Gordan dans [34]) au problème de déterminer des équations définissant $\mathcal{D}(n, \mathcal{V})$ comme sous-ensemble de l'espace affine ambiant (de façon équivalente : définissant $Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$ comme sous-ensemble de l'espace projectif ambiant).

Dans cette section, nous supposons que le corps de base $\mathbb{L}$ est de caractéristique nulle. Rappelons que nous confondons l'algèbre symétrique $S\mathcal{V}$ et l'algèbre des fonctions polynomiales sur V.

Nous reprenons la présentation de la méthode de Brill donnée dans [30]. Nous renvoyons le lecteur intéressé à cet ouvrage pour les démonstrations.

- Soit une fonction polynomiale f homogène de degré n sur V, elle a un développement de Taylor :

$$f(t_1 w_1 + t_2 w_2) = \sum_{i+j=n} D^{i,j} f(w_1, w_2) \frac{t_1^i}{i!} \frac{t_2^j}{j!}$$

  (les $D^{i,j} f(w_1, w_2)$ sont dans $S^i\mathcal{V} \otimes S^j\mathcal{V}$, à multiplication par un scalaire près, des polarisés de f, voir l'annexe A).
- Soient $f, g \in S^n\mathcal{V}$. On définit leur *covariant apolaire* $f \odot g \in S^n\mathcal{V} \otimes S^n\mathcal{V}$ par la formule :

$$(f \odot g)(w_1, w_2) =$$
$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{i+j=n} (-1)^i \frac{1}{k!(n-k)!} D^{(j,i)} f(w_1, w_2) D^{(i,j)} g(w_1, w_2)$$

- Soit $f \in S^n\mathcal{V}$. On considère :

$$f(tf(w_1)w + w_1)/f(w_1)$$

  Cette fonction se développe sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{n} e_k(\mathbb{F}) t^k$$

  où :

$$e_k(\mathbb{F}) = \frac{1}{k!} D^{k,n-k} f(w, w_1) f(w_1)^{k-1}$$

  C'est une fonction polynomiale homogène en f de degré k, homogène en w_1 de degré $k(n-1)$, et homogène en w de degré k.
  On considère les $e_k(\mathbb{F})$ comme les fonctions symétriques élémentaires d'un alphabet virtuel $\mathbb{F}$. Il leur correspond donc [1] des fonctions sommes de puissances $p_k(\mathbb{F})$. En particulier $p_n(\mathbb{F})$ est une fonction polynômiale homogène en f de degré n, homogène en w_1 de degré $n(n-1)$, et homogène en w de degré n.

[1] On entend par la que les $p_k(\mathbb{F})$ sont les images des sommes de puissances p_k par l'unique morphisme d'algèbres qui envoie e_k sur $e_k(\mathbb{F})$

– Considérant f et p_n comme des polynômes en w, on pose :

$$B(f, w_1, w_2, w_3) = B_f(w_1, w_2, w_3) = (f \odot p_n(\mathbb{F}))(w_2, w_3)$$

C'est une fonction polynômiale homogène en les coefficients de f de degré $n+1$, homogène en w_1 de degré $n(n-1)$, homogène en w_2 de degré n, et homogène en w_3 de degré n.

Le théorème fondamental est le suivant :

Théorème 3.4 *Soit f une fonction polynomiale homogène de degré n sur V. Elle est produit de facteurs linéaires si et seulement si $B_f = 0$.*

Preuve : Voir [30], théorème 2.12. ■

▷ **Exemple :** Reprenons l'exemple donné dans [30]. Considérons le cas le plus simple : $n = 2$. Alors f est une forme quadratique. Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique associée. Par un calcul direct on obtient que :

$$B_f(w_1, w_2, w_3) = -\frac{4}{3} \det \begin{bmatrix} \phi(w_1, w_1) & \phi(w_1, w_2) & \phi(w_1, w_3) \\ \phi(w_2, w_1) & \phi(w_2, w_2) & \phi(w_2, w_3) \\ \phi(w_3, w_1) & \phi(w_3, w_2) & \phi(w_3, w_3) \end{bmatrix}$$

Les équations obtenues à partir de la condition $B_f = 0$ sont donc celles obtenues par la condition $\operatorname{rang} \phi \leq 2$. ◁

Notons $W = S^{n(n-1)}\mathcal{V} \otimes S^n\mathcal{V} \otimes S^n\mathcal{V}$, alors $B \in S^{n+1}(T^n_{sym}V) \otimes W$.

À chaque fois que nous nous donnons une base $t_1, \dots, t_{r+1}$ de $\mathcal{V}$, alors nous munissons W de la base des $\mathbf{t}^\alpha \otimes \mathbf{t}^\beta \otimes \mathbf{t}^\gamma$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^{r+1}(n^2 - n)$ et β et γ dans $\mathbb{N}^{r+1}(n)$.

Nous décomposons :

$$B = \sum_{\alpha, \beta\gamma} b_{\alpha,\beta,\gamma}\, \mathbf{t}^\alpha \otimes \mathbf{t}^\beta \otimes \mathbf{t}^\gamma$$

Définition 3.2 *On note $\mathcal{B}rill(\mathcal{V})$ l'idéal de $S(T^n_{sym}V)$ engendré par les $b_{\alpha,\beta,\gamma}$.*

Cet idéal est en fait indépendant du choix de la base des t_i de $\mathcal{V}$. En effet, il admet aussi la description suivante, indépendante des choix de coordonées : c'est l'idéal engendré par les $(1 \otimes \ell)(B)$ pour ℓ parcourant W^*.

Une propriété importante de B est que c'est un covariant. Précisément : $GL(\mathcal{V})$ agit naturellement sur $S(T^n_{sym}V) \cong S((S^n\mathcal{V}^*))$ (de façon contravariante) et sur W (de façon covariante), et B est un élément invariant pour l'action obtenue sur le produit tensoriel : $(u^{-1} \otimes u)(B) = B$. De façon équivalente, il s'agit de vérifier que pour tout $v \in GL(\mathcal{V})$ on a l'identité :

$$B_{f\circ v^{-1}}(v(w_1), v(w_2), v(w_3)) = B_f(w_1, w_2, w_3)$$

Ceci se fait aisément en suivant pas-à-pas la construction.

On en déduit que l'idéal $\mathcal{B}rill(\mathcal{V})$ est invariant sous l'action naturelle de $GL(\mathcal{V})$.

En effet, soit $u \in GL(\mathcal{V})$. Alors $u(\mathcal{B}rill(\mathcal{V}))$ est engendré par les $(u \otimes \ell)(B)$ pour ℓ parcourant W^*. Or on a :

$$\begin{aligned}(u \otimes \ell)(B) &= (1 \otimes (\ell \circ u)) \circ (u \otimes u^{-1})(B) \\ &= (1 \otimes (\ell \circ u))(B)\end{aligned}$$

Lorsque ℓ parcourt W^* alors $\ell \circ u$ parcourt aussi W^*.

Définition 3.3 *Les* équations de Brill *sont les équations $P_{\alpha,\beta,\gamma} = 0$, où les $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ sont les images des $b_{\alpha,\beta,\gamma}$ par l'isomorphisme (3.3).*

Nous notons aussi $\mathcal{B}rill_n^{r+1}$ l'idéal de $\mathbb{Q}[\{\boldsymbol{e}_\beta\}_{\beta\in\mathbb{N}^{r+1}(n)}]$ engendré par les $P_{\alpha,\beta,\gamma}$.

L'isomorphisme (3.3) est défini à partir d'un choix de base $t_1, \ldots, t_{r+1}$ de $\mathcal{V}$, mais le fait que B est un covariant assure qu'un choix différent de base de $\mathcal{V}$ donnera les mêmes polynômes $P_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Les équations obtenues par la méthode de Brill engendrent-elles tout l'idéal de $\mathcal{D}(n, \mathcal{V})$? Un simple calcul de dimension donne des éléments de réponse.

L'idéal $\ker \varphi^*$ de $Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$ est le noyau d'un morphisme d'algèbres graduées :

$$\oplus_N S^N T^n_{sym} V \longrightarrow \oplus_N T^n_{sym} S^N V$$

Les dimensions des composantes de degré N de ces deux algèbres sont faciles à calculer :

$$\dim S^N T^n_{sym} V = \binom{\binom{n+r}{r} + N - 1}{N}$$

et :

$$\dim T^n_{sym} S^N V = \binom{\binom{N+r}{r} + n - 1}{n}$$

Notons :

$$\delta(n, r+1, N) = \dim S^N T^n_{sym} V - \dim T^n_{sym} S^N V$$

Alors $\delta(n, r+1, N)$ minore la dimension de la composante de degré N de $\ker \varphi^*$. Or toutes les équations de Brill sont de degré $N = n + 1$. Nous devons donc comparer la dimension $d(n, r)$ de l'espace vectoriel engendré par les relations de Brill avec le nombre $\delta(n, r+1, n+1)$.

Cette comparaison est effectuée dans le tableau suivant, dans les cas où nous avons pu calculer les équations de Brill. Le tableau donne aussi le temps de calcul des équations de Brill.

paramètres	$n=2$ $r=2$	$n=3$ $r=2$	$n=4$ $r=2$	$n=3$ $r=3$
$d(n,r)$	1	35	396	875
$\delta(n,r+1,n+1)$	1	35	1002	1085
temps de calcul (s)	$0,1$	$6,5$	13649	4617

Nous voyons immédiatement que :

Proposition 3.5 *Les relations de Brill n'engendrent pas l'idéal* $\mathcal{R}elh_n^{r+1}$ *pour* $n=3, r=3$*, ni pour* $n=4, r=2$.

Au contraire, comparant avec les résultats trouvés calculés en section 3.3, on voit que les équations de Brill engendrent l'idéal $\mathcal{R}el_3^3$.

Une question plus délicate est de savoir si les équations de Brill définissent la structure de variété de $Chow(n,\mathbb{P}\mathcal{V})$, ou si, au contraire, elles définissent une structure de schéma non-réduit.

Une façon de faire la vérification est de déterminer si $\mathcal{B}rill(\mathcal{V})$ coïncide en grands degrés avec l'idéal de $Chow(n,\mathbb{P}\mathcal{V})$, en calculant les polynômes de Hilbert. Malheureusement, nous n'avons pas été capables de calculer le polynôme de Hilbert de $\mathcal{B}rill_n^{r+1}$ pour $n=4, r=2$ ni pour $n=r=3$: dans ces deux cas, les équations de Brill sont trop volumineuses.

Nous avons réussi à faire la comparaison en procédant localement, en utilsant le critère donné par le corollaire 2.4. En effet, pour savoir si $\mathcal{B}rill(\mathcal{V})$ définit la structure de variété de $Chow(n,\mathbb{P}\mathcal{V})$, un examen local suffit, dans des ouverts recouvrant $\mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$. Nous procédons à cet examen dans les ouverts $u(U_2)$ pour u parcourant $GL(\mathcal{V})$ (voir le lemme 3.1). Mais comme l'idéal $\mathcal{B}rill(\mathcal{V})$ et l'idéal de $Chow(n,\mathbb{P}\mathcal{V})$ sont tous les deux invariants sous l'action de $GL(\mathcal{V})$, l'examen dans U_2 est suffisant.

Travaillant en coordonnées, nous sommes ramenés à déterminer si les idéaux $\pi(\mathcal{B}rill_n^{r+1})$ et $\mathcal{R}el_n^r$ coïncident. Le corollaire 2.4 nous donne la marche à suivre pour obtenir la réponse.

Les resultats sont présentés dans le tableau suivant. Dans ce tableau, la *codimension* est la codimension de $\mathrm{in}(\pi(\mathcal{B}rill_n^{r+1})+\mathcal{T}^+B_n^r))$, tandis que la *codimension attendue* est la codimension de $\mathrm{in}(\mathcal{R}el_n^r+\mathcal{T}^+B_n^r))$ (en suivant les notations du corollaire 2.4).

paramètres	$n=2$ $r=2$	$n=3$ $r=2$	$n=4$ $r=2$	$n=3$ $r=3$
codimension	2	6	24	37
codimension attendue $(n!)^{r-1}$	2	6	24	36

Nous en déduisons :

Proposition 3.6 *La structure de schéma définie par les équations de Brill sur $Chow(n, \mathbb{P}\mathcal{V})$ est sa structure de variété pour $n = 4, r = 2$, mais pas pour $n = 3, r = 3$.*

Notes

- Une autre démonstration de la proposition 3.6 pour le cas $n = r = 3$ est donnée dans [21] et [22]. Le calcul pour $n = 4, r = 2$ nous semble nouveau.

3.5 La conjecture de Foulkes-Howe

Dans cette section, $\mathbb{L}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, ou de caractéristique positive supérieure ou égale à n.

D'après la propriété universelle de l'algèbre symétrique, l'identification naturelle :

$$S^1(T^n_{sym}V) \cong T^n_{sym}(S^1V)$$

se prolonge, de façon unique, en un morphisme d'algèbres graduées :

$$\widehat{\varphi}^* : S(T^n_{sym}V) \longrightarrow \oplus_N T^n_{sym}(S^N V)$$

Sur ce morphisme porte une conjecture due à Howe [36], pour préciser une conjecture de Foulkes [28].

Conjecture de Foulkes-Howe : *La restriction en degré N du morphisme $\widehat{\varphi}^*$ est injective pour $N \leq n$ et surjective pour $N \geq n$.*

Remarque : L'assertion sur la surjectivité implique l'assertion sur l'injectivité : si $\widehat{\varphi}^*$ est surjective en tout degré $N \geq n$, alors en, particulier, ce morphisme est surjectif en degré n. Mais les composantes de degré n de l'espace de départ et de l'espace d'arrivée ont même dimension : d'où en fait la bijectivité en degré n, qui implique l'injectivité en tout degré $N \leq n$. $\boxdot$

Dans [11], Michel Brion a donné la solution partielle suivante :

Proposition 3.7 *La restriction en degré N de $\widehat{\varphi}^*$ est surjective dès que $N \geq r(n-1)(ns+n-s)$, où s est le plus petit entier vérifiant $(r+1)s \geq \binom{n+r}{r}$, et $r+1$ est la dimension de V.*

Le morphisme $\widehat{\varphi}^*$ n'est autre que le morphisme entre anneaux de coordonnées homogènes obtenu à partir du plongement $\widehat{\varphi} : (\mathbb{P}\mathcal{V})^n/\mathfrak{S}_n \to \mathbb{P}(S^n\mathcal{V})$. *Via* les isomorphismes (3.3) et (3.2), le problème se reformule de la façon suivante :

Reformulation de la conjecture de Foulkes-Howe en termes de polynômes multisymétriques : *Les polynômes multisymétriques élémentaires homogènes engendrent les composantes de degré $N \geq n$ de $\mathfrak{D}_n^{r+1}(\mathbb{L})$.*

Nous donnons plusieurs énoncés équivalents de la conjecture.

Théorème 3.8 *Soit A un anneau dans lequel $n!$ est inversible. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *Pour tout r, les polynômes multisymétriques élémentaires homogènes engendrent les composantes de degré $N \geq n$ de $\mathfrak{D}_n^{r+1}(A)$.*
2. *Les produits de polynômes multisymétriques élémentaires homogènes engendrent le sous-espace $\mathfrak{D}_n^{n^2}(A)_{\mathrm{mdeg}=(1,1,\ldots,1)}$.*
3. *Les produits de polynômes multisymétriques élémentaires homogènes engendrent le sous-espace $\mathfrak{D}_n^{n}(A)_{\mathrm{mdeg}=(n,n,,\ldots,n)}$.*
4. *Dans $\mathfrak{D}_n^n(A)$, la fonction monomiale $m_{[n\xi_1,n\xi_2,\ldots,n\xi_n]}$ est égale à un polynôme en les polynômes multisymétriques élémentaires homogènes e_β, $\beta \in \mathbb{N}^{r+1}(n)$.*

L'énoncé (1) est la reformulation de la conjecture de Foulkes-Howe. L'énoncé (2) prépare une reformulation combinatoire de la conjecture, faisant intervenir des objets simples (voir la proposition 3.9). L'énoncé (3) prépare une autre reformulation combinatoire de la conjecture, faisant intervenir des objets plus compliqués mais moins grands, mieux adaptés aux vérifications expérimentales (voir la proposition 3.10). L'énoncé (4) montre qu'il existe un "certificat de validité" pour la conjecture pour chaque valeur de n : une formule – facile à vérifier, une fois exhibée – garantissant la validité de la conjecture pour n donné.

Preuve : Clairement (1) $\Rightarrow$ (2) et (3) $\Rightarrow$ (4). Il n'est pas difficile de voir qu'on a aussi (2) $\Rightarrow$ (3). En effet, il existe une application linéaire surjective :

$$\mathfrak{D}_n^{n^2}(A)_{\mathrm{mdeg}=(1,1,\ldots,1)} \to \mathfrak{D}_n^n(A)_{\mathrm{mdeg}=(n,n,\ldots,n)}$$

qui envoie toute fonction monomiale homogène sur une fonction monomiale homogène (à facteur multiplicatif inversible dans A près), et tout produit de polynômes multisymétriques élémentaires homogènes sur un produit de polynômes multisymétriques élémentaires homogènes. C'est la restriction à $\mathfrak{D}_n^{n^2}(A)_{\mathrm{mdeg}=(1,1,\ldots,1)}$ du morphisme d'algèbres $\mathfrak{D}_n^{n^2}(A) \to \mathfrak{D}_n^n(A)$ obtenu en envoyant, pour chaque lettre $x \in \{a,\ldots,z\}$:

$$\begin{gathered} x_1, x_2, \ldots, x_n \mapsto x_1 \\ x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n} \mapsto x_2 \\ \vdots \\ x_{n^2-n+1}, x_{n^2-n+2}, \ldots, x_{n^2} \mapsto x_n \end{gathered}$$

Le gros du travail consiste à montrer que (4) $\Rightarrow$ (1). La démarche suivie dans la démonstration de cette implication est la suivante :

- Par polarisation, nous déduisons de l'hypothèse (4) qu'une certaine fonction monomiale homogène $m_{\mathfrak{q}}$ de $\mathfrak{D}_n^{n^2}(A)$ s'exprime aussi comme polynôme en les élémentaires homogènes.
- Pour chaque fonction monomiale homogène $m_{\mathfrak{p}}$ de degré $\text{degh} = n$ de $\mathfrak{D}_n^{r+1}(A)$, nous construisons un morphisme d'algèbres graduées adapté, de $\mathfrak{D}_n^{n^2}(A)$ dans $\mathfrak{D}_n^{r+1}(A)$, qui envoie la fonction monomiale homogène $m_{\mathfrak{q}}$ sur $m_{\mathfrak{p}}$, et qui envoie les élémentaires homogènes sur des élémentaires homogènes.
- Pour finir, on exploite la formule de réduction (proposition 1.9) pour déduire des expressions des monomiales homogènes de tout degré $N > n$ de $\mathfrak{D}_n^{r+1}(A)$ comme polynômes en les élémentaires homogènes, à partir des expressions des fonctions monomiales homogènes de degré n.

Pour commencer la preuve, introduisons pour toute lettre x de l'alphabet $a, \ldots, z$ des variables supplémentaires $x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, et considérons la construction suivante :

- On remplace chaque variable x_i (pour tout x dans l'alphabet et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$) par $x_{i,1} + \ldots + x_{i,n}$. Ceci envoie l'algèbre $\mathfrak{D}_n^n(A)$ (des polynômes multisymétriques homogènes en les x_i) dans l'algèbre $\mathfrak{D}_n^{n^2}(A)$ (des polynômes multisymétriques homogènes en les $x_{i,j}$).
- Pour un élément de $\mathfrak{D}_n^n(A)$ de multidegré $(n, n, \ldots, n)$, on sélectionne la composante de multidegré $(1, 1, \ldots, 1)$ (il y a n^2 coordonnées 1) de son image dans $\mathfrak{D}_n^{n^2}(A)$ par l'opération précédente.

Alors il est facile de voir que cette opération envoie la fonction monomiale $m_{[n\xi_1, \ldots, n\xi_n]}$ de $\mathfrak{D}_n^n(A)$ sur $(n!)^n m_{\mathfrak{q}(n)}$, où la partition de vecteur $\mathfrak{q}(n)$ est celle dont les parts sont les $(\xi_{i,1} + \ldots + \xi_{i,n})$ pour i parcourant $\{1, \ldots, n\}$. Cette opération envoie aussi un produit de polynômes multisymétriques élémentaires homogènes de $\mathfrak{J}_n^n(A)$ sur une somme de produits d'élémentaires homogènes de $\mathfrak{J}_n^{n^2}(A)$ (précisément, $e_{\beta^{(1)}} \cdots e_{\beta^{(n)}}$ est envoyé sur la somme des $e_{\alpha^{(1)}} \cdots e_{\alpha^{(n)}}$, pour toutes les familles de n vecteurs $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ de $\mathbb{N}^{n \times n}$ vérifiant $\sum_k \alpha_{j,k}^{(i)} = \beta_j^{(i)}$). On en déduit que $m_{\mathfrak{q}(n)}$ est un polynôme en les élémentaires homogènes.

Maintenant la deuxième étape : soit une fonction monomiale homogène $m_{\mathfrak{p}}$ de degré n de $\mathfrak{D}_n^{r+1}(A)$. La partition de vecteur en indice est de la forme $\mathfrak{p} = [\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}]$ pour des vecteurs $\alpha^{(i)} \in \mathbb{N}^{r+1}(n)$. Nous définissons une application g du produit cartésien $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, r+1\}$ de la façon suivante : pour chaque i, on pose $g(i,j) = 1$ pour les $\alpha_1^{(i)}$ premiers éléments j de $\{1, \ldots, n\}$, puis $g(i,j) = 2$ pour les $\alpha_2^{(i)}$ éléments j suivants, et ainsi de suite, jusquà $g(i,j) = r+1$ pour les $\alpha_{r+1}^{(i)}$ derniers éléments j. Considérons l'application associée qui envoie $x_{i,j}$ sur $x_{g(i,j)}$ pour tous indices i, j et toute lettre x. Elle induit un morphisme d'algèbres de

$\mathfrak{D}_n^{n^2}(A)$ dans $\mathfrak{D}_n^{r+1}(A)$, qui, d'après la proposition 1.15, envoie $m_{\mathfrak{q}(n)}$ sur $\mu_{\mathfrak{p}}! m_{\mathfrak{p}}$, et qui envoie un polynôme élémentaire homogène sur un multiple entier d'un élémentaire homogène. On obtient donc une expression de $m_{\mathfrak{p}}$ comme polynôme, à coefficients dans A, en les élémentaires homogènes.

Passons à la dernière étape : soit une fonction monomiale homogène $m_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{D}_n^{r+1}(A)$, de degré $N > n$. Alors $\mathfrak{p} = [\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}]$ pour des $\alpha^{(i)} \in \mathbb{N}^{r+1}(N)$. Soit s le minimum des $\alpha_{r+1}^{(i)}$, disons qu'il est atteint pour la part numéro $i = 1$. Nous distinguons les trois cas : $s \geq N - n, N - n > s > 0$ et $s = 0$.

D'abord, si $s \geq N - n$ alors on a la factorisation :

$$m_{\mathfrak{p}} = (e_{0,\ldots,0,n})^{N-n} m_{\mathfrak{p}'}$$

où $\mathfrak{p}'$ est la partition de vecteur obtenue de $\mathfrak{p}$ en remplaçant tous les $\alpha_{r+1}^{(i)}$ par $\alpha_{r+1}^{(i)} - (N - n)$. La fonction monomiale $m_{\mathfrak{p}'}$ est donc homogène de degré $N - (N - n) = n$, et donc s'exprime comme polynôme en les élémentaires homogènes, et par suite il en va de même pour $m_{\mathfrak{p}}$.

Considérons maintenant le cas où $N - n > s > 0$. Alors on a la factorisation :

$$m_{\mathfrak{p}} = (e_{0,\ldots,0,n})^{s} m_{\mathfrak{p}'}$$

où $\mathfrak{p}'$ est la partition de vecteur obtenue de $\mathfrak{p}$ en remplaçant tous les $\alpha_{r+1}^{(i)}$ par $\alpha_{r+1}^{(i)} - s$. La fonction monomiale $m_{\mathfrak{p}'}$ est donc homogène de degré $N - s > n$, et sa part obtenue de $\alpha^{(1)}$ a sa $(r + 1)$-ième coordonnée nulle. On est donc ramené au dernier cas.

Le dernier cas est $s = \alpha_{r+1}^{(1)} = 0$. Soit $\check{\mathfrak{p}}$ la partition de vecteur de $\mathbb{N}^r$ obtenue de $\mathfrak{p}$ en oubliant les $(r + 1)$-ièmes coordonnées, autrement dit ses parts sont les $(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_r^{(i)})$. Sa part obtenue de $\alpha^{(1)}$ est de norme $N > n$. La formule de réduction (proposition 1.9) donne une expression dans $\mathfrak{I}_n^r(A)$:

$$m_{\check{\mathfrak{p}}} = \sum \bullet\, e_\alpha m_{\mathfrak{r}} \tag{3.7}$$

où les $\bullet$ sont des coefficients dans A et les $\alpha \in \mathbb{N}^r$ sont non-nuls. Réhomogénéisons cette expression : nous remplaçons chaque variable x_i (pour tout x dans l'alphabet et $i \in \{1, \ldots, r\}$) par x_i / x_{r+1} puis nous multiplions le résultat par $(a_{r+1} \cdots z_{r+1})^N$. Par cette transformation, l'équation 3.7 devient :

$$m_{\mathfrak{p}} = \sum \bullet\, e_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, n - |\alpha|)} m_{\hat{\mathfrak{r}}}$$

où $\hat{\mathfrak{r}}$ est la partition de vecteur de $\mathbb{N}^{r+1}$ obtenue de $\mathfrak{r}$ en remplaçant chacune des parts $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ par $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, N - 1 - |\gamma|)$. Ainsi le résultat est acquis pour les fonctions monomiales homogènes de degré $N > n$ dès qu'il est acquis pour les fonctions monomiales de degré $N - 1$. Ceci permet, par récurrence, de conclure. ∎

Soit $\mathrm{Parth}(n)$ l'ensemble des partitions de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n^2\}$ en n blocs tous de cardinal n. C'est un sous-ensemble du treillis Part_{n^2} défini en section 1.3.3. On dira que deux partitions, éléments de $\mathrm{Parth}(n)$, sont *incidentes* si leur borne inférieure (dans Part_{n^2}) est la partition minimale (en n^2 singletons). De façon équivalente : si un bloc de la première partition et un bloc de la seconde ont toujours un et un seul élément commun.

Proposition 3.9 *Les énoncés du théorème 3.8 sont équivalents à ce que la matrice de la relation d'incidence de* $\mathrm{Parth}(n)$ *soit inversible.*

Preuve : Comme dans la section 1.3.3, nous associons à chaque partition Π élément de $\mathrm{Parth}(n)$ une partition $\mathfrak{p}_\Pi$ du vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$ (à n^2 coordonnées). Lorsque Π parcourt $\mathrm{Parth}(n)$, alors $\mathfrak{p}_\Pi$ parcourt exactement l'ensemble des indices $\mathfrak{q}$ des fonctions monomiales $m_\mathfrak{q}$ et des produits de polynômes multisymétriques élémentaires homogènes $e_\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{D}_n^{n^2}(A)_{\mathrm{mdeg}=(1,1,\ldots,1)}$. De plus, pour Π et Σ dans $\mathrm{Parth}(n)$, on a que $\zeta(\mathfrak{p}_\Pi, \mathfrak{p}_\Sigma)$ (le coefficient de $m_{\mathfrak{p}_\Sigma}$ dans la décomposition de $e_{\mathfrak{p}_\Pi}$ suivant les fonctions monomiales, proposition 1.12) vaut 1 si Π et Σ sont incidentes, et 0 sinon. Par conséquent, la matrice introduite dans la proposition n'est autre que la matrice des coefficients des $e_\mathfrak{q} \in \mathfrak{D}_n^{n^2}(A)_{\mathrm{mdeg}=(1,1,\ldots,1)}$ exprimés dans la base des $m_\mathfrak{q}$ de cet espace. L'énoncé de la proposition est maintenant clairement équivalent à la formulation (2) dans le théorème. ■

▹ **Exemple :** Pour $n = 2$ il y a trois éléments dans $\mathrm{Parth}(2)$, à savoir

$$\{\{1,2\},\{3,4\}\}, \qquad \{\{1,3\},\{2,4\}\}, \qquad \{\{1,4\},\{2,3\}\}$$

Ces partitions sont deux-à-deux incidentes, mais aucune partition n'est incidente à elle-même. La matrice de la relation d'incidence est donc :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

qui bien sûr est inversible.

Pour $n = 3$ il y a 280 éléments dans $\mathrm{Parth}(3)$. La relation d'incidence est plus compliquée. Voici deux partitions distinctes non-incidentes :

$$\{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\}\} \text{ et } \{\{1,2,7\},\{4,5,8\},\{3,6,9\}\}$$

◃

Les matrices de la proposition précédente deviennent rapidement de taille trop grande pour des vérifications expérimentales (le nombre d'éléments de $\mathrm{Parth}(n)$ est $(n^2)!/(n!)^{n+1}$). Nous introduisons un critère mieux adapté.

Notons $\mathrm{VP}(n)$ l'ensemble des partitions du vecteur $(n, n, \dots, n)$ à n coordonnées, dont toutes les parts sont de norme n. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathbb{N}^n$ en permutant les coordonnées. Cette action induit une action sur l'ensemble des partitions de vecteur de $\mathbb{N}^n$: pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et une partition de vecteur $\mathfrak{p} = [\alpha, \beta, \dots]$ on définit $\sigma\mathfrak{p} = [\sigma\alpha, \sigma\beta, \dots]$. Cette action stabilise $\mathrm{VP}(n)$, nous pouvons considérer l'ensemble d'orbites $\mathrm{VP}(n)/\mathfrak{S}_n$.

Remarquons que pour toutes partitions de vecteur $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ et toute permutation σ on a $\zeta(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = \zeta(\sigma\mathfrak{p}, \sigma\mathfrak{q})$. Nous posons :

$$\hat{\zeta}(\mathcal{O}(\mathfrak{p}), \mathcal{O}(\mathfrak{q})) = \sum_{\mathfrak{p}' \in \mathcal{O}(\mathfrak{p})} \zeta(\mathfrak{p}', \mathfrak{q})$$

où $\mathcal{O}(\dots)$ désigne l'orbite d'un élément. Alors :

Proposition 3.10 *Les énoncés du théorème 3.8 sont équivalents à ce que la matrice des $\zeta(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2)$, pour $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2$ parcourant $\mathrm{VP}(n)/\mathfrak{S}_n$, soit inversible.*

Preuve : Commençons par le calcul suivant. Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{VP}(n)$, on a :

$$e_{\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{q}} \zeta(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) m_{\mathfrak{q}} = \sum_{\mathfrak{o}_2} \sum_{\mathfrak{q} \in \mathfrak{o}_2} \zeta(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) m_{\mathfrak{q}}$$

donc pour tout $\mathfrak{o}_1 \in \mathrm{VP}(n)/\mathfrak{S}_n$ il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{o}_1} e_{\mathfrak{p}} &= \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{o}_1} \sum_{\mathfrak{o}_2} \sum_{\mathfrak{q} \in \mathfrak{o}_2} \zeta(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) m_{\mathfrak{q}} \\
&= \sum_{\mathfrak{o}_2} \sum_{\mathfrak{q} \in \mathfrak{o}_2} \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{o}_1} \zeta(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) m_{\mathfrak{q}} = \sum_{\mathfrak{o}_2} \sum_{\mathfrak{q} \in \mathfrak{o}_2} \hat{\zeta}(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2) m_{\mathfrak{q}} \\
&= \sum_{\mathfrak{o}_2} \hat{\zeta}(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2) \left(\sum_{\mathfrak{q} \in \mathfrak{o}_2} m_{\mathfrak{q}} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi les $\hat{\zeta}(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2)$ sont les coefficients des $\sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{o}_1} e_{\mathfrak{p}}$ dans la base des $\sum_{\mathfrak{q} \in \mathfrak{o}_2} m_{\mathfrak{q}}$ du sous-espace de $\mathfrak{D}_n^n(A)_{\mathrm{mdeg}=(n,n,\dots,n)}$ invariant par permutation des coordonnées.

Si l'énoncé (3) du théorème est vrai, alors cette matrice est inversible. Inversement, si cette matrice est inversible, alors en particulier l'énoncé (4) du théorème est vrai.

D'où la proposition. ∎

Remarque : À une suite de n vecteurs de $\mathbb{N}^n$, tous de norme n, nous associons la matrice carrée dont les n colonnes sont ces vecteurs : une telle matrice est appelée *carré semi-magique d'ordre n et de somme magique n*, car la somme des coefficients de chaque ligne vaut n, de même que la somme des coefficients de chaque colonne, mais la condition sur les sommes suivant les diagonales qui en feraient un carré magique ne sont pas imposées. Ces objets sont aussi les sommes de n matrices de permutation d'ordre n.

Les éléments de $\mathrm{VP}(n)$ correspondent donc aux classes d'équivalence de carrés semi-magiques *modulo* permutation des colonnes, et les éléments de $\mathrm{VP}(n)/\mathfrak{S}_n$ correspondent aux classes d'équivalence de ces carrés semi-magiques *modulo* permutation des lignes entre elles et permutation des colonnes entre elles. $\boxdot$

Nous avons pu vérifier que la proposition est vraie pour tout $n \leq 4$.

Pour $n = 2$, il y a deux éléments dans $\mathrm{VP}(2)/\mathfrak{S}_2$. Si nous représentons chacun par un carré semi-magique (à considérer *modulo* permutation des lignes et permutation des colonnes), il s'agit de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice des $\hat{\zeta}(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2)$ est :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En l'inversant, on obtient le certificat suivant prévu par l'énoncé (4) du théorème :

$$m_{[(2,0),(0,2)]} = e_{1,1}^2 - 2\, e_{2,0} e_{0,2}$$

Pour $n = 3$, il y a cinq éléments dans $\mathrm{VP}(3)/\mathfrak{S}_3$, représentés par les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice des $\hat{\zeta}(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2)$ est :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 9 & 6 & 18 & 12 \end{bmatrix}$$

Si $\mathfrak{o}$ est représentée par la matrice M, notons $e(M) = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{o}} e_{\mathfrak{p}}$. Alors on a obtenu le certificat de validité suivant :

$$m_{[(3,0,0)(0,3,0)(0,0,3)]} = e\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} - 3\,e\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$
$$+ 6\,e\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}$$
$$- 3\,e\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix} + 33\,e\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Nous avons également fait le calcul pour $n = 4$. Il y a 44 éléments dans $\mathrm{VP}(4)/\mathfrak{S}_4$. À la différence de ce que nous avions espéré, la matrice des $\hat{\zeta}(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2)$ n'est pas triangulaire.

Nous avons trouvé le certificat correspondant, exprimant la fonction monomiale $m_{[(4\xi_1)(4\xi_2)(4\xi_3)(4\xi_4)]}$ comme combinaison linéaire des 465 produits de multidegré $(4, 4, 4, 4)$ de quatre polynômes multisymétriques élémentaires homogènes. À la différence des cas précédents, les coefficients ne sont pas entiers, mais ce sont tous des multiples de $1/3$.

L'existence de ces certificats montre, suivant le critère 4 du théorème 3.8, que :

Proposition 3.11 *La conjecture de Foulkes-Howe est vérifiée pour* $n \leq 4$.

Notes

- La reformulation en termes de polynômes multisymétriques de la conjecture de Foulkes-Howe avait été proposée par Dalbec dans [22].
- La première et deuxième étape de la preuve de la proposition 3.8 sont inspirées par une remarque de [69], par. 18.
- Notre critère donné dans la proposition 3.9 est très semblable à celui donné dans [9]. Dans cet article, Black et List introduisent aussi la matrice de la relation d'incidence de $\mathrm{Parth}(k)$, et montrent que son inversibilité assure de la validité de la conjecture de Foulkes-Howe pour tous les couples $N = k, n = k'$ avec $1 \leq k' \leq k$ (donc un nombre fini de couples). Nous avons montré le résultat plus fort : que l'inversibilité de cette matrice assure de la validité de la conjecture pour tous les couples $N = k'', n = k$ pour tous les $k'' \in \mathbb{N}^*$.

Chapitre 4

Relations entre coefficients et racines pour les systèmes d'équations polynomiales

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ est un corps (de caractéristique quelconque), et $\mathbb{L}$ est un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{K}$.

Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à des systèmes d'équations :

$$\begin{cases} F_1(X_1, \ldots, X_r) & = 0 \\ & \vdots \\ F_k(X_1, \ldots, X_r) & = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

où les F_i sont des polynômes, éléments de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_r]$, et avec un nombre fini de solutions dans $\mathbb{L}^r$. Quelles sont les relations entre les coefficients du système et les polynômes multisymétriques des zéros ?

Dans le cas univarié ($r = 1$), tout idéal a une présentation canonique : il est principal, on le présente en donnant son unique générateur unitaire. Les coefficients de ce générateur s'identifient, au signe près, aux polynômes symétriques élémentaires des zéros. Les relations entre coefficients et polynômes symétriques des zéros sont donc aussi des relations entre différentes familles de polynômes symétriques.

Dans le cas multivarié ($r > 1$), la situation est autre. D'abord, un idéal n'est plus déterminé par le multi-ensemble de ses zéros, dès lors qu'il y a des multiplicités. Dans ce cas il n'y a pas d'espoir de déduire les coefficients à partir des polynômes multisymétriques des zéros.

Ensuite, les idéaux zéro-dimensionnels n'ont plus de présentation canonique. Ce qui s'en rapproche le plus est la donnée de la base de Gröbner réduite (une fois un ordre monomial fixé), ou une présentation comme intersection complète (qui n'existe pas toujours, et qui n'est pas unique).

Nous commençons donc par considérer ces deux types de systèmes. Nous verrons qu'on peut exhiber des formules explicites, polynomiales ou rationnelles, liant les polynômes multisymétriques des zéros et les coefficients du système :

- Dans le cas des bases de Gröbner (pas nécéssairement réduites) d'idéaux zéro-dimensionnels (section 4.2), le processus de réduction donne des formules pour exprimer les polynômes multisymétriques des zéros comme polynômes en les coefficients. Inversement, à condition de considérer des bases de Gröbner réduites d'idéaux sans zéro multiple, des formules donnent les coefficients comme quotient de deux polynômes multisymétriques des zéros. Ces dernières formules sont des analogues des formules d'interpolation de Lagrange.
- Nous considérons ensuite les *intersections complètes strictes* (section 4.3). Ce sont des idéaux zéro-dimensionnels, intersections complètes, sans zéro à l'infini dans une certaine compactification de l'espace affine. Dans ce cas il existe un résultant, qui permet d'obtenir les polynômes multisymétriques des zéros comme quotients de deux polynômes en les coefficients.

La situation examinée ensuite est celle des *systèmes de Pham généralisés* (section 4.4). C'est dans un certain sens l'intersection des deux situations ci-dessus. En plus des formules des situations "Bases de Gröbner" et "intersections complètes strictes", qui sont encore valides pour les systèmes de Pham généralisés, on peut exprimer les polynômes multisymétriques des racines comme polynômes en les coefficients du sytème via des formules de récurrence, les *identités d'Aizenberg-Kytmanov.*

Comme souvent en passant de l'univarié au multivarié, une notion donnée se généralise de plusieurs façons. C'est le cas des identités de Newton (1.6) : elles lient les sommes de puissances et les polynômes symétriques élémentaires. Elles se généralisent en des identités liant sommes de puissances multisymétriques et polynômes multisymétrqiues élémentaires (les identités de Newton multisymétriques, 1.12). Mais comme les polynômes symétriques élémentaires des racines d'une équation sont aussi ses coefficients (au signe près), on peut aussi bien dire que les identités de Newton lient les sommes de puissances des racines d'une équation et les coefficients de cette équation. C'est dans ce sens-là que les identités d'Aizenberg-Kytmanov généralisent les identités de Newton.

4.1 Généralités sur les idéaux zéro-dimensionnels

Dans cette section nous faisons de nombreux rappels, sans démonstration, sur les idéaux zéro-dimensionnels d'un anneau de polynômes. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [33] et au livre [19]. Tous les résultats cités ici sont donc classiques, excepté le dernier, qui fait le lien entre polynômes multisymétriques des zéros d'un idéal zéro-dimensionnel et l'anneau de coordonnées affines associé.

Soit un système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{ll} F_1(X_1,\ldots,X_r) & = 0 \\ \vdots & \\ F_k(X_1,\ldots,X_r) & = 0 \end{array}\right. \tag{4.2}$$

où les F_i sont des polynômes, éléments de $\mathbb{K}[\mathbf{X}] = \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_r]$. On supposera que le système d'équations $F_1 = \ldots = F_k = 0$ a un nombre fini de solutions dans $\mathbb{L}^r$.

Soit I l'idéal engendré par $F_1,\ldots,F_k$. Comme son ensemble de racines est zéro-dimensionnel, on dit que I est zéro-dimensionnel. Soit $\mathbb{A} = \mathbb{K}[\underline{X}]/I$ l'algèbre-quotient associée. On a une décomposition en somme directe :

$$\mathbb{A} \otimes_K \mathbb{L} = \oplus_x \mathbb{A}_x$$

où x parcourt l'ensemble des zéros de I dans $\mathbb{L}^r$. Chaque facteur $\mathbb{A}_x$ est une algèbre locale, de dimension finie comme $\mathbb{L}$-espace vectoriel. Sa dimension est la *multiplicité* $\mu(x)$ du point x comme zéro de I. En particulier, l'algèbre $\mathbb{A}$ est de dimension finie $n = \sum_x \mu(x)$.

Les solutions du système, munies de leurs multiplicités, forment un multi-ensemble de points de $\mathbb{L}^r$ de longueur n. On note $\mathfrak{z} = [a,b,\ldots,z]$ ce multi-ensemble. Il est naturel de chercher à étudier les relations entre les polynômes multisymétriques de ce multi-ensemble et les coefficients du système.

La forme linéaire *trace* associée à I est définie sur $\mathbb{K}[\underline{X}]$ par :

$$\mathrm{Tr}_I(P) = P(a) + \ldots + P(z)$$

(elle se factorise en une forme linéaire sur $\mathbb{A}$). Pour un monôme, $\mathrm{Tr}_I(\mathbf{X}^\alpha) = p_\alpha(\mathfrak{z})$, la somme de puissance multisymétrique d'indice α évaluée au multi-ensemble des solutions (pour le monôme $\mathbf{X}^\mathbf{0} = 1$, on a $\mathrm{Tr}_I(1) = n = \boldsymbol{a}^\mathbf{0} + \ldots + \boldsymbol{z}^\mathbf{0}$, aussi nous nous permettons encore de noter cette quantité $p_\mathbf{0}(\mathfrak{z})$).

Un polynôme P quelconque est combinaison linéaire de monômes :

$$P = \sum c_\alpha \mathbf{X}^\alpha$$

Sa trace est donnée par la combinaison linéaire de sommes de puissances correspondante :

$$\mathrm{Tr}_I(P) = \sum c_\alpha p_\alpha(\mathfrak{z})$$

En particulier $\mathrm{Tr}_I(P)$ s'obtient toujours par évaluation d'un polynôme multisymétrique en le multi-ensemble des zéros.

À chaque polynôme P on peut associer l'endomorphisme de multiplication par P dans $\mathbb{A}$, notons le mult_P. Alors le scalaire $\mathrm{Tr}_I(P)$ est la trace de l'endomorphisme mult_P.

La série génératrice des polynômes multisymétriques élémentaires des zéros de I :

$$E_{\mathfrak{z}}(u_1, \ldots, u_r) = \sum_{\alpha} e_\alpha(\mathfrak{z}) \boldsymbol{u}^\alpha$$

est appelée *forme de Chow* du multi-ensemble de points $\mathfrak{z}$, ou encore u-résultant de l'idéal I. Par définition, c'est le produit :

$$E_{\mathfrak{z}}(u_1, \ldots, u_r) = \prod_x (1 + X_1(x)u_1 + \ldots + X_r(x)u_r)$$

pour x parcourant le multi-ensemble $\mathfrak{z}$ (une racine multiple donnant un facteur multiple). Soit mult l'endomorphisme de multiplication par $1 + X_1u_1 + \ldots + X_ru_r$ dans $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[u_1, \ldots, u_r]$. Alors on montre que :

$$E_{\mathfrak{z}}(u_1, \ldots, u_r) = \det \mathrm{mult}$$

Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes dont les classes *modulo* I forment une base d'espace vectoriel de $\mathbb{A}$. On peut former une telle famille en prenant tous les monômes irréductibles relativement à une base de Gröbner de I. Soit la matrice $M = (P_i(x))_{\substack{i=1\ldots n\\ x=a\ldots z}}$. Son rang est le nombre de zéros distincts de l'idéal dans $\mathbb{L}^r$ (voir [33] ou [19]). En particulier, cette matrice est inversible si et seulement si toutes ses solutions sont distinctes. Remarquons qu'en multipliant M à droite par sa transposée on obtient la matrice $(\mathrm{Tr}_I(P_iP_j))_{\substack{i=1\ldots n\\ j=1\ldots n}}$. Cette dernière matrice est donc inversible si et seulement si les zéros de I sont deux-à-deux distincts. Ses coefficients sont des polynômes multisymétriques du multi-ensemble des zéros. Le déterminant de cette matrice joue le rôle d'un discriminant.

Nous nous intéresserons en particulier au cas où les P_i sont des monômes. De façon générale, soit $\mathcal{E} = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)})$ une suite de k vecteurs de $\mathbb{N}^r$. Soient $u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}$ des points de $\mathbb{L}^r$ ou encore la famille de variables $\mathbf{X} = X_1, \ldots, X_r$. Nous poserons :

$$V_{\mathcal{E}}(u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{\alpha^{(1)}}(u^{(1)}) & \mathbf{X}^{\alpha^{(1)}}(u^{(2)}) & \ldots & \mathbf{X}^{\alpha^{(1)}}(u^{(k)}) \\ \mathbf{X}^{\alpha^{(2)}}(u^{(1)}) & \mathbf{X}^{\alpha^{(2)}}(u^{(2)}) & \ldots & \mathbf{X}^{\alpha^{(2)}}(u^{(k)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{X}^{\alpha^{(k)}}(u^{(1)}) & \mathbf{X}^{\alpha^{(k)}}(u^{(2)}) & \ldots & \mathbf{X}^{\alpha^{(k)}}(u^{(k)}) \end{bmatrix}$$

Pour un multi-ensemble $\mathfrak{z}$ de points de $\mathbb{L}^r$ de longueur n et des familles $\mathcal{E} = (\alpha^{(i)})_{i=1,\ldots,n}$ et $\mathcal{E}' = (\beta^{(i)})_{i=1,\ldots,n}$ de n éléments de $\mathbb{N}^r$, nous poserons :

$$\Delta_{[\mathcal{E}\,|\,\mathcal{E}']}(\mathfrak{z}) = \det\left(V_{\mathcal{E}}(\mathfrak{z}) V_{\mathcal{E}'}^T(\mathfrak{z})\right)$$

Autrement dit :

$$\Delta_{[\mathcal{E}\,|\,\mathcal{E}']}(\mathfrak{z}) = \det \begin{bmatrix} p_{\alpha^{(1)}+\beta^{(1)}}(\mathfrak{z}) & p_{\alpha^{(1)}+\beta^{(2)}}(\mathfrak{z}) & \cdots & p_{\alpha^{(1)}+\beta^{(n)}}(\mathfrak{z}) \\ p_{\alpha^{(2)}+\beta^{(1)}}(\mathfrak{z}) & p_{\alpha^{(2)}+\beta^{(2)}}(\mathfrak{z}) & \cdots & p_{\alpha^{(2)}+\beta^{(n)}}(\mathfrak{z}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{\alpha^{(n)}+\beta^{(1)}}(\mathfrak{z}) & p_{\alpha^{(n)}+\beta^{(2)}}(\mathfrak{z}) & \cdots & p_{\alpha^{(n)}+\beta^{(n)}}(\mathfrak{z}) \end{bmatrix}$$

$\triangleright$ **Exemple :** Dans la cas univarié, le déterminant de Vandermonde d'ordre k en les k variables $a, \ldots, z$ est le déterminant de $V_{(0,1,\ldots,n-1)}(a, \ldots, z)$. Le discriminant d'un polynôme unitaire de degré n avec $\mathfrak{z}$ comme multi-ensemble de zéros est :

$$\Delta_{[0,1,\ldots,n-1\,|\,0,1,\ldots,n-1]}(\mathfrak{z}) = \det \begin{bmatrix} n & p_1(\mathfrak{z}) & p_2(\mathfrak{z}) & \cdots & p_{n-1}(\mathfrak{z}) \\ p_1(\mathfrak{z}) & p_2(\mathfrak{z}) & p_3(\mathfrak{z}) & \cdots & p_n(\mathfrak{z}) \\ p_2(\mathfrak{z}) & p_3(\mathfrak{z}) & p_4(\mathfrak{z}) & \cdots & p_{n+1}(\mathfrak{z}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n-1}(\mathfrak{z}) & p_n(\mathfrak{z}) & p_{n+1}(\mathfrak{z}) & \cdots & p_{2n-1}(\mathfrak{z}) \end{bmatrix}$$

$\triangleleft$

Pour finir cette section nous faisons apparaître les fonctions multisymétriques monomiales du multi-ensemble des zéros de I.

Théorème 4.1 *Soient $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)}$ des vecteurs non-nuls de $\mathbb{N}^r$ deux à deux distincts, et $\alpha \in \mathbb{N}^k$ avec $|\alpha| \leq n$. Soit $\mathfrak{p} = [(\alpha^{(1)})^{\alpha_1}(\alpha^{(2)})^{\alpha_2} \cdots (\alpha^{(k)})^{\alpha_k}]$. Alors $m_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{z})$ est le coefficient de $t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \cdots t_k^{\alpha_k}$ dans le déterminant de l'endomorphisme de multiplication par $1 + t_1\mathbf{X}^{\alpha^{(1)}} + \ldots + t_k\mathbf{X}^{\alpha^{(k)}}$ de $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t_1, t_2, \ldots]$.*

Preuve : Pour tout $P \in \mathbb{K}[\mathbf{X}][t_1, \ldots, t_k]$, le déterminant de l'endomorphisme de multiplication par P de $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_k]$ est le produit des évaluations de P aux zéros de I, comptés avec leurs multiplicité : $\prod_{x=a,\ldots,z} P(x)$. En particulier, pour $P = 1 + t_1\mathbf{X}^{\alpha^{(1)}} + \ldots + t_k\mathbf{X}^{\alpha^{(k)}}$ le déterminant de la multiplication par P est :

$$\prod_{x=a,\ldots,z} \left(1 + t_1\boldsymbol{x}^{\alpha^{(k)}} + \ldots + t_k\boldsymbol{x}^{\alpha^{(k)}}\right)$$

Comparant avec la fonction génératrice des polynômes multisymétriques élémentaires (1.1), on reconnaît que le coefficient de $\mathbf{t}^\alpha$ dans ce produit est l'image (évaluée en $\mathfrak{z}$) de e_α par le morphisme d'algèbres de $\mathfrak{I}_n^k(\mathbb{Z})$ dans $\mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Z})$ induit par l'application polynomiale envoyant x_i sur $\boldsymbol{x}^{\alpha^{(i)}}$, pour chaque lettre x dans l'alphabet $a, b, \ldots, z$ et pour chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$. Par définition, le polynôme multisymétrique élémentaire e_α est :

$$\sum \boldsymbol{a}^{\beta^{(a)}} \boldsymbol{b}^{\beta^{(b)}} \cdots \boldsymbol{z}^{\beta^{(z)}}$$

la somme étant étendue à tous les choix de vecteurs $\beta^{(a)}, \beta^{(b)}, \ldots, \beta^{(z)}$ de $\mathbb{N}^k$ de sorte qu'il y ait exactement α_1 vecteurs de base ξ_1, et α_2 vecteurs de base ξ_2, *etc.*.., α_k vecteurs de base ξ_k, et tous les autres vecteurs nuls.

Par conséquent, son image par le morphisme décrit ci-dessus est :

$$\sum \boldsymbol{a}^{\gamma^{(a)}} \boldsymbol{b}^{\gamma^{(b)}} \cdots \boldsymbol{z}^{\gamma^{(z)}}$$

la somme étant étendue à tous les choix de vecteurs $\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}, \ldots, \gamma^{(z)}$ de sorte qu'il y ait exactement α_1 vecteurs $\alpha^{(1)}$, et α_2 vecteurs $\alpha^{(2)}$, ..., α_k vecteurs $\alpha^{(k)}$, et tous les autres vecteurs nuls. Il s'agit donc bien de la fonction monomiale $m_{[(\alpha^{(1)})^{\alpha_1} (\alpha^{(2)})^{\alpha_2} \cdots (\alpha^{(k)})^{\alpha_k}]}$ ■

4.2 Relations entre coefficients et racines pour les bases de Gröbner

Nous nous intéressons ici au cas où le système d'équations considéré est une base de Gröbner réduite de l'idéal I qu'elle engendre.

Dans le cas univarié, le théorème fondamental des polynômes multisymétriques nous assure que tout polynôme symétrique des racines est un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de l'équation. Nous verrons (théorème 4.5) que ce résultat se généralise pour les bases de Gröbner.

Nous exhiberons aussi (théorème 4.7) des formules permettant de retrouver les coefficients d'une base de Gröbner réduite à partir des polynômes multisymétriques de ses zéros, lorsque ces zéros sont sans multiplicité.

Pour commencer, nous devons préciser le genre de formules polynomiales que nous attendons pour exprimer les polynômes multisymétriques des zéros en fonction des coefficients d'une base de Gröbner.

On se donne un ordre monomial $\preceq$ sur les monômes en $X_1, \ldots, X_r$. On se donne une partie finie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{N}^r$, qui contient un multiple entier de chaque vecteur de base de $\mathbb{Z}^r$. On l'énumère : $\mathcal{D} = \{\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(k)}\}$ de sorte que $\mathbf{X}^{\beta^{(i)}} \preceq \mathbf{X}^{\beta(i+1)}$. Soit A un anneau. On considère les familles $F = (F_1, \ldots, F_k)$ de polynômes de $A[\mathbf{X}]$ de la forme :

$$F_i = \mathbf{X}^{\beta^{(i)}} + \sum_{\alpha} \bullet \mathbf{X}^{\alpha}$$

où la somme est étendue à tous les α tels que $\mathbf{X}^{\alpha} \prec \mathbf{X}^{\beta^{(i)}}$, et les $\bullet$ sont dans A. Soit $\mathcal{A}(\preceq, \mathcal{D}, A)$ l'espace de ces familles (les coefficients en constituent les coordonnées). Soit $\mathcal{G}(\preceq, \mathcal{D})$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}(\preceq, \mathcal{D}, \mathbb{K})$ formé des F qui forment une base de Gröbner pour $\preceq$ de l'idéal I qu'ils engendrent dans $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$. Cet idéal a toujours un nombre fini de zéros dans $\mathbb{L}^r$, et lorsque F est une base de Gröbner, le nombre de zéros est fixé. C'est le cardinal du sous-ensemble des monômes irréductibles pour F et $\preceq$. Ce sous-ensemble est formé par les $\mathbf{X}^\gamma$ qui ne sont divisibles par aucun des $\mathbf{X}^{\beta^{(i)}}$.

Nous avons besoin d'un lemme de spécialisation. Sa preuve fait intervenir un algorithme de réduction que nous présentons auparavant. Cet algorithme de réduction fait intervenir le sous-algorithme suivant, qui effectue une étape dans la division d'un polynôme P par une famille F :

en entrée : $P \in A[X_1, \ldots, X_r]$ et $F \in \mathcal{A}(\preceq, \mathcal{D}, A)$.
en sortie : $R_F(P) \in A[X_1, \ldots, X_r]$ avec éventuellement
la déclaration de l'irréductibilité de P
algorithme :
S'il existe un monôme dans P
divisible par un $\mathbf{X}^{\beta^{(i)}}$ alors :
• choisir $\mathbf{X}^\alpha$ le plus grand de ces monômes pour $\preceq$.
Soit u son coefficient.
• choisir le plus petit i
tel que $\mathbf{X}^{\beta^{(i)}}$ divise $\mathbf{X}^\alpha$
• renvoyer $R_F(P) := P - u\mathbf{X}^{\alpha-\beta^{(i)}} F_i$
Sinon renvoyer $R_F(P) := P$ avec un message
annonçant l'irréductibilité de P.

On notera $R_F^{(t)}$ les itérés de l'opérateur R_F.

Voici l'algorithme de réduction :

en entrée : $P \in A[\mathbf{X}]$, et $F \in \mathcal{A}(\preceq, \mathcal{D}, A)$.
en sortie : $N_F(P)$ combinaison linéaire des monômes irreductibles
algorithme :
$Q := P$
Effectuer :
• Faire agir l'algorithme de réduction élémentaire
sur (Q, F).
• $Q := R_F(Q)$
Jusqu'à ce que Q ait été déclaré irréductible.
Renvoyer $N_F(P) := Q$

On considère des variables $a_\alpha^{(i)}$ pour les i dans $\{1, \ldots, k\}$ et les α tels que $\mathbf{X}^\alpha \prec \mathbf{X}^{\beta^{(i)}}$. Soient les polynômes

$$f_i = \mathbf{X}^{\beta^{(i)}} + \sum_\alpha a_\alpha^{(i)} \mathbf{X}^\alpha$$

dans $\mathbb{Z}[(a_\alpha^{(i)})][\mathbf{X}]$. Ils forment un système f, auquel sont associés les opérateurs N_f et R_f. Chaque F élément de $\mathcal{A}(\preceq, \mathcal{D}, \mathbb{K})$ définit un morphisme de $\mathbb{Z}[(a_\alpha^{(i)})]$

dans $\mathbb{K}$ (celui qui envoie $a_\alpha^{(i)}$ sur le coefficient de $\mathbf{X}^\alpha$ dans F_i). Pour $g \in \mathbb{Z}[(a_\alpha^{(i)})][\mathbf{X}]$ on notera $g(F) \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ l'image de g par ce morphisme. En particulier $F_i = f_i(F)$.

Le lemme suivant indique que l'on peut spécialiser une réduction *modulo* une base de Gröbner F (rappelons que les monômes dominants sont fixés, unitaires).

Lemme 4.2 *Soit $F \in \mathcal{A}(\preceq, \mathcal{D}, \mathbb{K})$. Soit $Q \in \mathbb{Z}[(a_\alpha^{(i)})][\mathbf{X}]$. Soit $\mathbf{X}^\alpha$ un monôme réductible de Q strictement plus grand que tout monôme réductible de $Q(F)$ (en particulier ce monôme n'apparaît pas dans $Q(F)$). Soit t le plus petit entier tel que $\mathbf{X}^\alpha$ n'apparaît plus dans $R_f^{(t)}(Q)$. Alors pour $s \in \{0, \dots, t\}$ on a $(R_f^{(s)}(Q))(F) = Q(F)$.*

Preuve : On procède par récurrence sur s. Pour $s = 0$ c'est trivial. Supposons le résultat vrai au rang $s < t$. On a $R_f^{s+1}(Q) = R_f^{(s)}(Q) - u\mathbf{X}^\gamma f_i$ pour un certain i et un certain $\mathbf{X}^\gamma$ réductible apparaissant dans $R_f^{(s)}(Q)$ (ceci implique $\mathbf{X}^\gamma \succ \mathbf{X}^\alpha$). Le monôme $\mathbf{X}^\gamma$ n'apparaît pas dans $Q = (R_f^{(s)}(Q))(F)$. Autrement dit, son coefficient dans Q est nul : $u(F) = 0$. Donc $(R_f^{s+1}(Q))(F) = (R_f^{(s)}(Q))(F) - u(F)\mathbf{X}^\gamma F_i = Q(F)$. D'où le résultat. ■

Le lemme suivant dit que forme normale et spécialisation commutent.

Lemme 4.3 *Soit $F \in \mathcal{A}(\preceq, \mathcal{D}, \mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{Z}[(a_\alpha^{(i)})][\mathbf{X}]$. Alors $(N_f(P))(F) = N_F(P(F))$.*

Preuve : Soit t l'indice pour lequel $R_F^{(t)}(P(F)) = N_F(P(F))$. Nous construisons une suite strictement croissante $(k_j)_{j=0,\dots,t}$ telle que :

$$\forall j, \quad R_F^{(j)}(P(F)) = (R_f^{(k_j)}(P))(F) \tag{4.3}$$

Pour cela, on pose $k_0 = 0$, ainsi la formule est vraie au rang $j = 0$. Supposons $k_0, \dots, k_j$ construits, avec $j < t$. Soit $\mathbf{X}^\alpha$ le plus grand des monômes réductibles dans $R_F^{(j)}(P(F))$. Ce monôme apparaît nécesssairement aussi dans $R_f^{(k_j)}(P)$. On choisit k_{j+1} le premier indice $k > k_j$ pour lequel $\mathbf{X}^\alpha$ n'apparaît plus dans $R_f^{(k)}(P)$. D'après le lemme précédent (avec $Q = R_f^{(k_j)}(P)$) et la formule (4.3), il vient que $(R_f^{(k_{j+1}-1)}(P))(F) = R_F^{(j)}(P(F))$. Maintenant $\mathbf{X}^\alpha$ est le plus grand monôme réductible à la fois dans $R_f^{(k_{j+1}-1)}(P)$ et $R_F^{(j)}(P(F))$. Notons v son coefficient dans $R_f^{(k_{j+1}-1)}(P)$, alors son coefficient dans $R_F^{(j)}(P(F))$ est $v(F)$. Il vient que $R_f^{(k_{j+1})}(P) = R_f^{(k_{j+1}-1)}(P) - v\mathbf{X}^\beta f_i$ et $R_F^{(j+1)}(P(F)) = R_F^{(j)}(P(F)) - v(F)\mathbf{X}^\beta F_i$ pour un certain i. Par suite,

$(R_f^{(k_{j+1})}(P))(F) = R_F^{(j+1)}(P(F))$. Voilà pour la construction de la suite des k_j. À la toute fin on obtient $(R_f^{(k_t)}(P))(F) = R_F^{(t)}(P(F)) = N_F(P(F))$. Appliquant une nouvelle fois le lemme, avec $Q = R_f^{(k_t)}(P)$, on obtient que $(N_f(P))(F) = N_F(P(F))$. ■

La raison d'être de ce lemme est le théorème 4.5 qui vient. Néanmoins nous pouvons, en entracte, énoncer la conséquence facile suivante :

Corollaire 4.4 *$\mathcal{G}(\preceq, \mathcal{D})$ est un sous-ensemble algébrique de $\mathcal{A}(\preceq, \mathcal{D}, \mathbb{K})$.*

Preuve : D'après le critère de Buchberger, F est une base de Gröbner si et seulement si pour tous les $\mathrm{Spoly}(F_i, F_j) = X^{\beta(i)}F_j - X^{\beta(j)}F_i$ on a $N_F(\mathrm{Spoly}(F_i, F_j)) = 0$. Considérons le système générique f. Posons :

$$N_F(\mathrm{Spoly}(f_i, f_j)) = \sum_\beta c_\beta \mathbf{X}^\beta$$

Soit $F \in \mathcal{A}(\preceq, \mathcal{D}, \mathbb{K})$. Alors :

$$N_F(\mathrm{Spoly}(F_i, F_j)) = N_F((\mathrm{Spoly}(f_i, f_j))(F)) = (N_f(\mathrm{Spoly}(f_i, f_j)))(F)$$

d'après le lemme. Donc F est dans $\mathcal{G}(\preceq, \mathcal{D})$ si et seulement si les $c_\beta(F)$ sont nuls. ■

On peut maintenant considérer l'application qui envoie $F \in \mathcal{G}(\preceq, \mathcal{D})$ sur le multi-ensemble $\mathfrak{z}$ des zéros de I. Il s'agit d'examiner si l'application qui en est déduite, envoyant F sur les polynômes multisymétriques en $\mathfrak{z}$, est polynomiale.

On obtient le théorème suivant, qui généralise bien le fait que dans le cas univarié, les polynômes multisymétriques des zéros d'un polynôme sont dans l'anneau des coefficients de l'équation.

Théorème 4.5 *Les polynômes multisymétriques des racines de I sont des fonctions polynomiales à coefficients entiers sur $\mathcal{G}(\preceq, \mathcal{D})$.*

Preuve : Soient $\mathbf{X}^{\gamma^{(i)}}$ pour $i = 1, \ldots, n$ les monômes irréductibles. Pour tout monôme $\mathbf{X}^\alpha$, posons $N_f(\mathbf{X}^{\alpha+\gamma^{(i)}}) = \sum_j c_{i,j,\alpha}\mathbf{X}^{\gamma(j)}$. Pour $F \in \mathcal{G}(\preceq, \mathcal{D})$, la matrice M_β de la multiplication par $\mathbf{X}^\beta$ dans $\mathbb{A} = \mathbb{K}[\mathbf{X}]/I$, relativement à la base des $\mathbf{X}^{\gamma^{(i)}}$, est la matrice des $c_{i,j,\alpha}(F)$. C'est donc une matrice à coefficients polynomiaux en F.

Soit une fonction monomiale $m_\mathfrak{p} = m_{[(\alpha^{(1)})^{\alpha_1}(\alpha^{(2)})^{\alpha_2}\cdots(\alpha^{(k)})^{\alpha_k}]}$, où les $\alpha^{(i)} \in \mathbb{N}^r$ sont non-nuls et deux-à-deux distincts. Alors $m_\mathfrak{p}(\mathfrak{z})$ est le coefficient de $t_1^{\alpha_1}\cdots t_k^{\alpha_k}$ dans le déterminant de l'endomorphisme de multiplication par $1 + t_1 \cdot \mathbf{X}^{\alpha^{(1)}} + \ldots + t_k \cdot \mathbf{X}^{\alpha^{(k)}}$ de $\mathbb{A}[t_1, \ldots, t_k]$ (théorème 4.1). La matrice de cet endomorphisme dans la base des monômes irréductibles $\mathbf{X}^{\gamma^{(i)}}$ est

$I + t_1 M_{\alpha^{(1)}} + \ldots + t_k M_{\alpha^{(k)}}$, c'est donc une matrice à coefficients polynomiaux en F et les t_i.

Le résultat du théorème est donc établi pour les fonctions monomiales, et, puisqu'elles engendrent l'algèbre des polynômes multisymétriques sur $\mathbb{K}$, pour tous les polynômes multisymétriques. ■

▷ **Exemple :** Considérons le cas où $r = 2$ et $\mathcal{D} = \{(2,0),(1,1),(0,2)\}$, et l'ordre $\preceq$ est l'ordre du degré lexicographique avec $X > Y$. Autrement dit, $X^i Y^j \leq X^u Y^v$ si et seulement si $i + j < u + v$ ou $i + j = u + v$ avec $i \leq u$. Alors :

$$\begin{aligned} f_1 &= X^2 + a^{(1)}_{1,1} XY + a^{(1)}_{0,2} Y^2 + a^{(1)}_{10} X + a^{(1)}_{01} Y + a^{(1)}_{00} \\ f_2 &= XY + a^{(2)}_{02} Y^2 + a^{(2)}_{10} X + a^{(2)}_{01} Y + a^{(2)}_{00} \\ f_3 &= Y^2 + a^{(3)}_{10} X + a^{(3)}_{01} Y + a^{(3)}_{00} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}^2(\preceq, \mathcal{D}, \mathbb{K})$ est un espace affine de dimension 12. On calcule les S-polynômes des paires f_i, f_j et on les réduit *modulo* les f_i. Les coefficients des polynômes en X, Y obtenus sont les équations de $\mathcal{G}^2(\preceq, \mathcal{D})$ dans $\mathcal{A}^2(\preceq, \mathcal{D}, \mathbb{K})$. On trouve que $\mathcal{G}^2(\preceq, \mathcal{D})$ est un sous-espace linéaire de codimension 3, déterminé par les équations :

$$\begin{aligned} a^{(1)}_{0,0} = &-a^{(1)}_{0,2} {a^{(3)}_{0,1}}^2 + a^{(1)}_{0,1} a^{(3)}_{0,1} + a^{(1)}_{1,0} a^{(2)}_{0,1} - a^{(2)}_{1,0} a^{(1)}_{0,1} - a^{(1)}_{0,2} {a^{(2)}_{1,0}}^2 \\ &- {a^{(2)}_{0,2}}^2 {a^{(3)}_{0,1}}^2 - {a^{(2)}_{0,1}}^2 - 2\, a^{(1)}_{0,2} a^{(3)}_{1,0} a^{(2)}_{0,1} - a^{(1)}_{1,1} a^{(2)}_{0,1} a^{(3)}_{0,1} \\ &+ 2\, a^{(2)}_{0,2} a^{(2)}_{0,1} a^{(3)}_{0,1} + 2\, a^{(2)}_{1,0} a^{(1)}_{0,2} a^{(3)}_{0,1} - a^{(1)}_{1,0} a^{(2)}_{0,2} a^{(3)}_{0,1} + a^{(1)}_{1,1} a^{(2)}_{0,2} {a^{(3)}_{0,1}}^2 \\ &- a^{(1)}_{1,1} a^{(2)}_{0,2} a^{(3)}_{1,0} a^{(2)}_{0,1} + a^{(1)}_{1,1} {a^{(2)}_{0,2}}^2 a^{(3)}_{1,0} a^{(3)}_{0,1} + a^{(3)}_{1,0} a^{(1)}_{1,1} a^{(1)}_{0,2} a^{(3)}_{0,1} - a^{(3)}_{0,1} a^{(1)}_{1,1} a^{(2)}_{1,0} a^{(2)}_{0,2} \\ &- a^{(3)}_{1,0} {a^{(1)}_{1,1}}^2 a^{(2)}_{0,2} a^{(3)}_{0,1} - a^{(3)}_{1,0} a^{(1)}_{1,1} a^{(1)}_{0,1} + a^{(3)}_{1,0} {a^{(1)}_{1,1}}^2 a^{(2)}_{0,1} + a^{(1)}_{1,1} a^{(2)}_{1,0} a^{(2)}_{0,1} \\ &- a^{(1)}_{0,2} {a^{(3)}_{1,0}}^2 {a^{(2)}_{0,2}}^2 + a^{(2)}_{0,2} a^{(1)}_{0,1} a^{(3)}_{1,0} + a^{(1)}_{0,2} a^{(3)}_{1,0} a^{(1)}_{1,0} + a^{(1)}_{1,1} a^{(1)}_{0,2} {a^{(3)}_{1,0}}^2 a^{(2)}_{0,2} \\ &+ 2\, a^{(1)}_{0,2} a^{(3)}_{1,0} a^{(2)}_{0,2} a^{(2)}_{1,0} - a^{(1)}_{0,2} a^{(3)}_{1,0} a^{(1)}_{1,1} a^{(2)}_{1,0} - {a^{(1)}_{0,2}}^2 {a^{(3)}_{1,0}}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{(2)}_{0,0} = &-a^{(2)}_{0,2} {a^{(2)}_{1,0}}^2 + a^{(2)}_{0,1} a^{(2)}_{1,0} - {a^{(2)}_{0,2}}^3 {a^{(3)}_{1,0}}^2 - a^{(1)}_{0,1} a^{(3)}_{1,0} + 2\, {a^{(2)}_{0,2}}^2 a^{(3)}_{1,0} a^{(2)}_{1,0} \\ &+ a^{(1)}_{1,1} a^{(2)}_{0,1} a^{(3)}_{1,0} - 2\, a^{(2)}_{0,2} a^{(2)}_{0,1} a^{(3)}_{1,0} + a_{0,2} a^{(3)}_{0,1} a^{(3)}_{1,0} + {a^{(2)}_{0,2}}^2 a^{(3)}_{0,1} a^{(3)}_{1,0} + a^{(1)}_{1,0} a^{(2)}_{0,2} a^{(3)}_{1,0} \\ &- a^{(1)}_{0,2} {a^{(3)}_{1,0}}^2 a^{(2)}_{0,2} + a^{(1)}_{1,1} {a^{(2)}_{0,2}}^2 {a^{(3)}_{1,0}}^2 - a^{(1)}_{1,1} a^{(2)}_{0,2} a^{(3)}_{1,0} a^{(2)}_{1,0} - a^{(1)}_{1,1} a^{(2)}_{0,2} a^{(3)}_{0,1} a^{(3)}_{1,0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{(3)}_{0,0} = &-{a^{(2)}_{1,0}}^2 + a^{(3)}_{1,0} a^{(1)}_{1,0} + a^{(3)}_{0,1} a^{(2)}_{1,0} - {a^{(2)}_{0,2}}^2 {a^{(3)}_{1,0}}^2 \\ &- a^{(1)}_{0,2} {a^{(3)}_{1,0}}^2 - a^{(2)}_{0,1} a^{(3)}_{1,0} + 2\, a^{(3)}_{1,0} a^{(2)}_{0,2} a^{(2)}_{1,0} - a^{(3)}_{1,0} a^{(1)}_{1,1} a^{(2)}_{1,0} + {a^{(3)}_{1,0}}^2 a^{(1)}_{1,1} a^{(2)}_{0,2} \end{aligned}$$

Calculant les traces des matrices de multiplication par X et Y on trouve que :

$$p_{1,0}(\mathfrak{z}) = a^{(1)}_{11} a^{(2)}_{10} + a^{(2)}_{02} a^{(3)}_{01} + a^{(1)}_{02} a^{(3)}_{10} - a^{(1)}_{10} - a^{(2)}_{01} - a^{(1)}_{11} a^{(2)}_{02} a^{(3)}_{10}$$

et

$$p_{0,1}(\mathfrak{z}) = -a_{01}^{(3)} - a_{10}^{(2)} + a_{02}^{(2)} a_{10}^{(3)}$$

Les valeurs des autres sommes de puissances sont facilement obtenues en utilisant les relations évidentes dérivées de $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$. Par exemple de $f_2 = 0$ on déduit :

$$p_{1,1}(\mathfrak{z}) + a_{02}^{(2)} p_{0,2}(\mathfrak{z}) + a_{10}^{(2)} p_{1,0}(\mathfrak{z}) + a_{01}^{(2)} p_{0,1}(\mathfrak{z}) + 3\, a_{00}^{(2)} = 0$$

donc :

$$\begin{aligned} p_{1,1}(\mathfrak{z}) = & -a_{1,1}^{(1)} {a_{1,0}^{(2)}}^2 + a_{1,0}^{(1)} a_{1,0}^{(2)} - a_{0,1}^{(2)} a_{1,0}^{(2)} \\ & - a_{0,2}^{(2)} {a_{0,1}^{(3)}}^2 - a_{0,2}^{(1)} a_{1,0}^{(3)} a_{1,0}^{(2)} + 3\, a_{0,1}^{(1)} a_{1,0}^{(3)} + a_{0,2}^{(2)} a_{0,1}^{(2)} a_{1,0}^{(3)} - 3\, a_{1,1}^{(1)} a_{0,1}^{(2)} a_{1,0}^{(3)} \\ & - 3\, a_{0,2}^{(1)} a_{0,1}^{(3)} a_{1,0}^{(3)} - {a_{0,2}^{(2)}}^2 a_{0,1}^{(3)} a_{1,0}^{(3)} - a_{1,0}^{(1)} a_{0,2}^{(2)} a_{1,0}^{(3)} + a_{0,2}^{(1)} {a_{1,0}^{(3)}}^2 a_{0,2}^{(2)} - a_{1,1}^{(1)} {a_{0,2}^{(2)}}^2 {a_{1,0}^{(3)}}^2 \\ & + 2\, a_{1,1}^{(1)} a_{0,2}^{(2)} a_{1,0}^{(3)} a_{1,0}^{(2)} + 3\, a_{1,1}^{(1)} a_{0,2}^{(2)} a_{0,1}^{(3)} a_{1,0}^{(3)} + a_{0,2}^{(2)} a_{1,0}^{(2)} a_{0,1}^{(3)} + a_{0,1}^{(2)} a_{0,1}^{(3)} \end{aligned}$$

$\triangleleft$

Nous présentons maintenant des formules d'interpolation permettant de retrouver des polynômes qui s'annulent en n points de $\mathbb{L}^r$, à partir des polynômes multisymétriques de ces points.

Lemme 4.6 *Soit $\mathfrak{z}$ un ensemble de n points de $\mathbb{L}^r$. Soit $I \subset \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ l'idéal des polynômes qui s'annulent en tous ces points. Soient $\mathbf{X}^{\alpha^{(1)}}, \ldots, \mathbf{X}^{\alpha^{(n)}}$ des monômes dont les images forment une base de $\mathbb{A} = \mathbb{K}[\mathbf{X}]/I$. Soit un polynôme G de la forme :*

$$G = \mathbf{X}^{\beta} + \sum_{k=1}^{n} g_k \mathbf{X}^{\alpha^{(k)}}$$

pour un certain β. Si $G \in I$ alors :

$$G = \frac{\det V_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(n)},\beta}(a,\ldots,z,\mathbf{X})}{\det V_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(n)}}(a,\ldots,z)} \tag{4.4}$$

Autrement dit le coefficient g_k est donné par les formules :

$$\begin{aligned} g_k &= (-1)^{n-k} \frac{\det V_{\mathcal{E}^{(k)}}(a,\ldots,z)}{\det V_{\mathcal{E}}(a,\ldots,z)} \\ &= (-1)^{n-k} \frac{\Delta_{[\mathcal{E}^{(k)} \mid \mathcal{E}]}(\mathfrak{z})}{\Delta_{[\mathcal{E} \mid \mathcal{E}]}(\mathfrak{z})} \end{aligned} \tag{4.5}$$

où $\mathcal{E} = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)})$ et $\mathcal{E}^{(k)} = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k-1)}, \alpha^{(k+1)}, \ldots, \alpha^{(n)}, \beta)$.

Preuve : Comme I est sans zéro multiple, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \to & \mathbb{L}\times\ldots\times\mathbb{L} \\ P & \longmapsto & (P(a),\ldots,P(z)) \end{array}$$

est un isomorphisme. En particulier, la matrice $V_{(\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(n)})}(a,\ldots,z)$ est inversible. Soit H le polynôme défini par la formule (4.4). Il est de la forme $\mathbf{X}^\beta + \sum_{k=1}^n \bullet\mathbf{X}^{\alpha^{(k)}}$ et s'annule aux n points. Donc $G-H$ est de la forme $\sum_{k=1}^n \bullet\mathbf{X}^{\alpha^{(k)}}$ et s'annule aux n points. La classe de $G-H$ *modulo* I est envoyée en $\mathbf{0}$ par l'isomorphisme ci-dessus, donc tous les coefficients sont nuls. ■

Lorsque $r=1$ ces formules se spécialisent en les formules d'interpolation de Lagrange (qui permettent de trouver l'unique polynôme de degré au plus $n-1$ s'annulant en $n-1$ points donnés et qui vaut 1 en un autre point donné).

Ce lemme donne le résultat suivant pour les bases de Gröbner :

Théorème 4.7 *Soit I un idéal zéro-dimensionnel réduit (*i-e *sans zéro multiple). Soit $\mathfrak{z}$ l'ensemble de ses zéros dans $\mathbb{L}^r$. Soit $\preceq$ un ordre monomial. Soit G dans la base de Gröbner réduite de I pour $\preceq$. Donc G est de la forme :*

$$G = \mathbf{X}^\beta + \sum_{k=1}^n g_k \mathbf{X}^{\alpha^{(k)}}$$

où $\mathbf{X}^{\alpha^{(1)}},\ldots,\mathbf{X}^{\alpha^{(n)}}$ sont les monômes irréductibles. Alors G est donné par la formule (4.4).

Ce théorème implique en particulier qu'une fois choisi l'ordre monomial, il existe une forme de base de Gröbner réduite générique : sur un ouvert de Zariski de la puissance symétrique $\mathbb{P}((\mathbb{L}^r)^n)/\mathfrak{S}_n$, la famille des monômes dominants de la base de Gröbner réduite est la même.

▷ **Exemple :** Traitons le cas très simple de trois points (distincts) du plan, avec comme ordre monomial l'ordre du degré lexicographique. Il y a trois formes possibles de bases de Gröbner réduites :

– forme (3)

$$f_1 = X^3 + a_{20}^{(1)}X^2 + a_{20}^{(1)}X^2 + a_{10}^{(1)}X + a_{00}^{(1)}$$
$$f_2 = Y + a_{00}^{(2)}$$

Le discriminant associé est :

$$\Delta_{[\mathcal{E}_1|\mathcal{E}_1]} = \begin{vmatrix} 3 & p_{10} & p_{20} \\ p_{10} & p_{20} & p_{30} \\ p_{20} & p_{30} & p_{40} \end{vmatrix}$$
$$= 18\, e_{2,0}e_{3,0}e_{1,0} - 4\, e_{2,0}{}^3 + e_{2,0}{}^2 e_{1,0}{}^2$$
$$-4\, e_{1,0}{}^3 e_{3,0} - 27\, e_{3,0}{}^2$$

où $\mathcal{E}_1 = ((0,0),(1,0),(2,0))$. Il est nul en $\mathfrak{z}$ si et seulement si des points du multi-ensemble sont sur une même verticale.

– forme $(2,1)$

$$\begin{aligned} f_1 &= X^2 + a_{10}^{(1)}X + a_{01}^{(1)}Y + a_{00}^{(1)} \\ f_2 &= XY + a_{10}^{(2)}X + a_{01}^{(2)}Y + a_{00}^{(2)} \\ f_3 &= Y^2 + a_{10}^{(3)}X + a_{01}^{(3)}Y + a_{00}^{(3)} \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{E}_2 = ((0,0)(1,0),(0,1))$. Le discriminant associé est :

$$\begin{aligned} \Delta_{[\mathcal{E}_2|\mathcal{E}_2]} &= \begin{vmatrix} 3 & p_{10} & p_{01} \\ p_{10} & p_{20} & p_{11} \\ p_{01} & p_{11} & p_{02} \end{vmatrix} \\ &= 12\, e_{2,0}e_{0,2} - 4\, e_{2,0}{e_{0,1}}^2 - 4\, {e_{1,0}}^2 e_{0,2} \\ &\quad -3\, {e_{1,1}}^2 + 4\, e_{1,1}e_{1,0}e_{0,1} \end{aligned}$$

Il s'annule si et seulement si les trois points sont alignés.

– forme $(1,1,1)$

$$\begin{aligned} f_1 &= X + a_{(00)}^{(1)} \\ f_2 &= Y^3 + a_{02}^{(2)}Y^2 + a_{01}^{(2)}Y + a_{00}^{(2)} \end{aligned}$$

Ce cas est semblable au cas des sytèmes de forme (3), en échangeant les coordonnées X et Y.

Un système de forme (3) ou $(1,1,1)$ est toujours une base de Gröbner pour l'ordre du degré lexicographique. Les conditions pour qu'un système de forme $(2,1)$ soit une base de Gröbner pour l'ordre du degré lexicographique ont été calculées dans l'exemple précédent :

$$\begin{aligned} a_{0,0}^{(1)} &= a_{0,1}^{(1)}a_{0,1}^{(3)} - {a_{0,1}^{(2)}}^2 - a_{1,0}^{(2)}a_{0,1}^{(1)} + a_{1,0}^{(1)}a_{0,1}^{(2)}, \\ a_{0,0}^{(2)} &= a_{0,1}^{(2)}a_{1,0}^{(2)} - a_{0,1}^{(1)}a_{1,0}^{(3)}, \\ a_{0,0}^{(3)} &= -{a_{1,0}^{(2)}}^2 + a_{1,0}^{(3)}a_{1,0}^{(1)} + a_{0,1}^{(3)}a_{1,0}^{(2)} - a_{0,1}^{(2)}a_{1,0}^{(3)} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pour déterminer laquelle des bases de Gröbner réduites est générique, il suffit de choisir un ensemble de points n'annulant aucun des discriminants Δ. Le multi-ensemble $[(1,0),(0,1),(u,u)]$ avec $u \neq 0, u \neq 1, 2u \neq 1$ convient (on ne précise pas plus la valeur de u pour pouvoir faire un raisonnement valable en toute caractéristique). À l'aide de la formule (4.4) on détermine que les polynômes suivants s'annulent sur ce multi-ensemble :

$$\begin{aligned} X^2 + \tfrac{u^2+u-1}{1-2u}X + \tfrac{u^2-u}{1-2u}Y + \tfrac{u-u^2}{1-2u} \\ XY + \tfrac{u^2}{1-2u}X + \tfrac{u^2}{1-2u}Y - \tfrac{u^2}{1-2u} \\ Y^2 + \tfrac{u^2-u}{1-2u}X + \tfrac{u^2+u-1}{1-2u}Y + \tfrac{u-u^2}{1-2u} \end{aligned}$$

On vérifie que c'est une base de Gröbner de l'idéal qu'elle engendre (autrement dit que ses coefficients vérifient les relations (4.6)). La forme générique des bases de Gröbner des idéaux de trois points du plan, pour l'ordre de degré lexicographique avec $X > Y$, est donc la forme $(2,1)$.

Les multi-ensembles de trois points distincts du plan qui admettent leur base de Gröbner réduite de cette forme (pour l'ordre choisi) sont tous ceux formés de trois points non-alignés.

Les multi-ensembles formés de trois points distincts, éléments du lieu $\Delta_{[\mathcal{E}_2|\mathcal{E}_2]} = 0$ ont aussi une forme de base de Gröbner générique, valable en dehors des lieux $\Delta_{[\mathcal{E}_1|(\mathcal{E}_1]} = 0$ et $\Delta_{[\mathcal{E}_3|\mathcal{E}_3]} = 0$. On détermine laquelle en utilisant les formules d'interpolation pour $\mathfrak{z} = [(0,0),(1,1),(u,u)]$ avec $u \neq 0, u \neq 1$. Le système de forme (3) dont $\mathfrak{z}$ est le multi-ensemble solution est :

$$\begin{array}{l} X^3 - (u+1)X^2 + uX \\ Y - X \end{array}$$

qui n'est pas une base de Gröbner pour l'ordre choisi. En revanche, le système de forme $(1,1,1)$ dont $\mathfrak{z}$ est le multi-ensemble solution est :

$$\begin{array}{l} X - Y \\ Y^3 - (u+1)Y^2 + uY \end{array}$$

qui convient.

En résumé, soient trois points distincts du plan. S'ils sont alignés, leur base de Gröbner réduite pour l'ordre du degré lexicographique avec $X > Y$ est de forme $(1,1,1)$ et s'ils ne le sont pas, elle est de forme $(2,1)$. $\triangleleft$

notes

- Dans [56] sont présentées des formules qui généralisent la formule (4.4) dans le cas où les zéros ne sont pas tous simples.

4.3 Cas des intersections complètes strictes

On examine le cas des intersections complètes strictes : ce sont des idéaux zéro-dimensionnels, intersections complètes, sans zéro à l'infini dans une certaine compactification de $\mathbb{L}^r$. L'existence d'un résultant nous permet d'obtenir des relations entre coefficients d'une base d'un tel idéal, et les polynômes multisymétriques de ses zéros.

Soit un poids $\omega \in (\mathbb{N}^*)^r$. Il définit une graduation de $\mathbb{K}[\mathbf{X}] = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_r]$:

$$\forall i, \quad \deg_\omega X_i = \omega_i$$

Définition 4.1 *On dit que I est une* intersection complète stricte *s'il existe un poids $\omega \in (\mathbb{N}^*)^r$ et une base $F = (F_1, \ldots, F_r)$ de l'idéal I tels que les composantes homogènes dominantes des F_i (relativement au poids ω) aient pour seul zéro commun le point $\mathbf{0}$.*

Cette terminologie vient de [48] (Voir leur proposition 4.2).

Proposition 4.8 *Soit I une intersection complète stricte. Alors I a un nombre fini de zéros dans $\mathbb{L}^r$. Soit $< F_1, \dots, F_r >$ une présentation de I comme intersection complète stricte (*i.-e.* comme dans la définition). Alors ce nombre de zéros, comptés avec multiplicités, est :*

$$n = \frac{\prod_{i=1}^{r} \deg_\omega F_i}{\prod_{i=1}^{r} \omega_i}$$

Ce résultat est la remarque 1.13.b) de [48].

Une intersection complète stricte est donc en particulier une intersection complète zéro-dimensionnelle dans $\mathbb{L}^r$.

Brièvement, nous expliquons comment construire une compactification de $\mathbb{L}^r$ dans laquelle une intersection complète stricte est sans zéro à l'infini.

Cadre géométrique : espaces projectifs anisotropes

Définition 4.2 *Soit $\bar{\omega} \in (\mathbb{N}^*)^{r+1}$. Il définit une graduation de $\mathbb{L}[X_1, \dots, X_{r+1}]$. Le schéma projectif associé à l'algèbre graduée ainsi obtenu est appelé* espace projectif anisotrope de poids $\bar{\omega}$. *On note :*

$$\mathbb{P}_\omega(\mathbb{L}^{r+1}) = \mathrm{Proj}\,(\mathbb{L}[X_1, \dots, X_{r+1}], \bar{\omega})$$

Cette variété peut être réalisé ainsi :

- Comme quotient de $\mathbb{L}^{r+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ par l'équivalence :

$$(x_1, \dots, x_{r+1}) \equiv (t_1^{\bar{\omega}_1} x_1, \dots, t_{r+1}^{\bar{\omega}_{r+1}} x_{r+1}), \qquad \forall (t_1, \dots, t_{r+1}) \in (\mathbb{L} \setminus \{\mathbf{0}\})^{r+1}$$

- Comme quotient de $\mathbb{P}(\mathbb{L}^{r+1})$ par l'action du produit de groupes de racines de l'unité :

$$U_{\bar{\omega}_1}(\mathbb{L}) \times \cdots \times U_{\bar{\omega}_{r+1}}(\mathbb{L})$$

  définie par :

$$(\eta_1, \dots, \eta_{r+1}) \cdot (x_1 : \cdots : x_{r+1}) = (\eta_1 \cdot x_1 : \cdots : \eta_{r+1} \cdot x_{r+1})$$

Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article de Dolgachev consacré aux espaces projectifs anisotropes [23].

Nous nous intéressons au cas particulier où $\omega \in (\mathbb{N}^*)^r$ et $\bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_r, 1)$. Alors l'ouvert de $\mathbb{P}_{\bar{\omega}}(\mathbb{L}^{r+1})$ défini par $X_{r+1} \neq 0$ est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{L}^r$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}^r & \cong & [X_{r+1} \neq 0] \subset \mathbb{P}_{\bar{\omega}}(\mathbb{L}^{r+1}) \\ (x_1, \dots, x_r) & \mapsto & (x_1 : \ldots : x_r : 1) \end{array}$$

Nous voyons donc que les intersections complètes strictes zéro-dimensionnelles sont les intersections complètes z´ero-dimensionelles de $\mathbb{L}^r$ sans point à l'infini dans $\mathbb{P}_{\bar{\omega}}(\mathbb{L}^{r+1})$.

Établissons un résultat qui nous servira par la suite, lorsque nous manipulerons le symbole de Kronecker :

Proposition 4.9 *(*Nullstellensatz dans l'espace projectif anisotrope*)*
Soit $\bar{\omega} \in (\mathbb{N}^*)^{r+1}$. Soient $H_1, \ldots, H_k \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_{r+1}]$ homogènes relativement à $\bar{\omega}$. Si $H_1, \ldots, H_k$ sont sans solution commune dans $\mathbb{P}_{\bar{\omega}}(\mathbb{L}^{r+1})$ alors il existe des exposants $\rho_1, \ldots, \rho_{r+1}$ et des polynômes $T_{11}, \ldots, T_{r+1,k}$ homogènes relativement à $\bar{\omega}$ tels que :

$$\begin{array}{ll} X_1^{\rho_1} & = T_{11}H_1 + \ldots + T_{1k}H_k \\ \vdots & \vdots \\ X_{r+1}^{\rho_{r+1}} & = T_{r+1,1}H_1 + \ldots + T_{r+1,k}H_k \end{array}$$

Preuve : Considérons le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_{r+1}] & \to & \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_{r+1}] \\ \forall i, \quad X_i & \mapsto & X_i^{\bar{\omega}_i} \end{array}$$

et notons l'image d'un polynôme R par $\tilde{R}$.

On suppose que $H_1, \ldots, H_k$ sont sans solution commune dans $\mathbb{P}_{\bar{\omega}}(\mathbb{L}^{r+1})$. Ceci signifie que $\tilde{H}_1, \ldots, \tilde{H}_r$ sont sans solution commune dans $\mathbb{P}(\mathbb{L}^{r+1})$. D'après le Nullstellensatz dans $\mathbb{P}(\mathbb{L}^{r+1})$, il existe un entier i et des polynômes $P_1, \ldots, P_k$ tels que :

$$X_1^i = P_1\tilde{H}_1 + \ldots + P_k\tilde{H}_k$$

Quitte à multiplier $P_1, \ldots, P_k$ par une même puissance de X_1, on peut supposer que i est de la forme $\rho_1\bar{\omega}_1$. Les monômes de $P_1, \ldots, P_k$ qui ne sont pas dans l'image de $R \mapsto \tilde{R}$ apportent une contribution globale nulle. On peut donc supposer que $P_1, \ldots, P_k$ sont dans l'image de $R \mapsto \tilde{R}$. Soient $T_{11}, \ldots, T_{1k}$ des antécédents respectifs. Alors on a obtenu :

$$\tilde{X}_1^{\rho_1} = \tilde{T}_{11}\tilde{H}_1 + \ldots + \tilde{T}_{1k}\tilde{H}_k$$

d'où l'on déduit :

$$X_1^{\rho_1} = T_{11}H_1 + \ldots + T_{1k}H_k$$

On procède de même pour les autres coordonnées. ■

Relations entre coefficients et polynômes multisymétriques des racines

Un outil fondamental pour les intersections complètes strictes est le *résultant anisotrope*. Nous présentons cet objet, en renvoyant au texte de Jouanolou ([41], par. 6.3) pour les démonstrations ou plus de précisions.

D'abord il nous faut introduire des notations. Soit un poids $\bar{\omega} \in (\mathbb{N}^*)^{r+1}$. Soient une suite d'entiers $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_{r+1})$. Pour chaque monôme $\mathbf{X}^\alpha$ en $X_1, \ldots, X_{r+1}$ de poids d_i nous introduisons une variable $a_\alpha^{(i)}$. On considère les familles $H = (H_1, \ldots, H_{r+1})$ de polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, avec H_i homogène relativement à $\bar{\omega}$ de poids d_i. Pour un polynôme $P \in \mathbb{Z}[(a_\alpha^{(i)})]$ nous notons $P(H) = P(H_1, \ldots, H_{r+1})$ le polynôme obtenu en remplacant $a_\alpha^{(i)}$ par le coefficient de $\mathbf{X}^\alpha$ dans H_i.

Proposition 4.10 *(Le résultant anisotrope)*
Il existe un unique polynôme $\mathrm{Res}_{\bar{\omega}}^{(\mathbf{d})} \in \mathbb{Z}[(a_\alpha^{(i)})]$ *tel que :*
- *Pour tout corps algébriquement clos* $\mathbb{L}$, *et pour tous polynômes* $H_1, \ldots, H_{r+1}$ *à coefficients dans* $\mathbb{L}$ *avec* H_i *homogène de poids* d_i *respectivement à* $\bar{\omega}$, *le système* $H_1 = \ldots = H_r = H_{r+1} = 0$ *a une solution dans* $\mathbb{P}_{\bar{\omega}}(L^{r+1})$ *si et seulement* $\mathrm{Res}_{\bar{\omega}}^{(\mathbf{d})}(H_1, \ldots, H_{r+1}) = 0$.
- $\mathrm{Res}_{\bar{\omega}}^{(\mathbf{d})}(X_1^{\frac{d_1}{\bar{\omega}_1}}, \ldots, X_{r+1}^{\frac{d_{r+1}}{\bar{\omega}_{r+1}}}) = 1$
- $\mathrm{Res}_{\bar{\omega}}^{(\mathbf{d})}$ *est irréductible dans* $\mathbb{K}[(a_\alpha^{(i)})]$ *pour tout corps* $\mathbb{K}$.

Si $H_1, \ldots, H_r \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_r]$ n'ont pas de zéro commun à l'infini dans $\mathbb{P}_{\bar{\omega}}(\mathbb{L}^{r+1})$ alors l'ensemble de leurs zéros communs dans $\mathbb{L}^r$ est nécessairement fini. Soient $H_1^\flat, \ldots, H_r^\flat$ les polynômes obtenus des H_i en remplaçant X_{r+1} par 1. L'algèbre $\mathbb{A} = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_r]/\langle H_1^\flat, \ldots, H_r^\flat \rangle$ est de dimension finie. Pour $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_r]$ on peut considérer l'endomorphisme mult_P de $\mathbb{A}$ de multiplication par P, et son déterminant.

Ceci permet de présenter la *formule de Poisson* vérifiée par le résultant anisotrope :

Proposition 4.11 *Soient des polynômes* $H_1, \ldots, H_r \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_r]$ *homogènes relativement à* $\bar{\omega}$ *de poids respectifs* $d_1, \ldots, d_r$. *On suppose qu'ils n'ont pas de zéro commun dans l'hyperplan* $X_{r+1} = 0$ *de* $\mathbb{P}_{\bar{\omega}}(\mathbb{L}^{r+1})$. *Alors pour tout* $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_r]$ *homogène relativement à* $\bar{\omega}$ *de poids* d_{r+1} *on a :*

$$\det(\mathrm{mult}_{P^\flat}) = \frac{\mathrm{Res}_{\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1}}^{(d_1, \ldots, d_r, d_{r+1})}(H_1, \ldots, H_r, P)}{\left(\mathrm{Res}_{\omega_1, \ldots, \omega_r}^{(d_1, \ldots, d_r)}(H_1^\infty, \ldots, H_r^\infty)\right)^{\frac{d_{r+1}}{\bar{\omega}_{r+1}}}}$$

où H_i^∞ *est le polynôme obtenu de* H_i *en remplaçant* X_{r+1} *par* 0, *et* $P^\flat$ *le polynôme obtenu de* P *en remplaçant* X_{r+1} *par* 1.

On peut donc, d'après le théorème 4.1, obtenir les polynômes multi-symétriques du multi-ensemble des zéros d'une intersection complète stricte *via* ces formules. Ceci donne :

Théorème 4.12 *Soit* I *une intersection complète stricte, avec présentation* $F = (F_1, \ldots, F_r)$, *et multi-ensemble de racines* $\mathfrak{z}$.

Soit $\omega \in (\mathbb{N}^*)^r$ un poids tel que les composantes homogènes dominantes $F_i^{\natural\infty}$ soient sans zéro commun non-trivial. On note $F_i^\natural$ l'homogénéisé de F_i en poids $d_i = \deg_\omega F_i$ par la variable X_{r+1} (de poids $\omega_{r+1} = 1$).

Soit une fonction multisymétrique monomiale $m_{[(\alpha^{(1)})^{\alpha_1}(\alpha^{(2)})^{\alpha_2}\cdots(\alpha^{(k)})^{\alpha_k}]}$ de $\mathfrak{I}_n^r$ (avec les $\alpha^{(i)}$ non-nuls,deux-à-deux distincts).

Alors son évaluation en $\mathfrak{z}$ est le coefficient de $t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2}\cdots t_k^{\alpha_k}$ dans :

$$\frac{\mathrm{Res}^{(d_1,\ldots,d_r,d_{r+1})}_{\omega_1,\ldots,\omega_r,1}(F_1^\natural,\ldots,F_r^\natural,Q^\natural)}{\left(\mathrm{Res}^{(d_1,\ldots,d_r)}_{\omega_1,\ldots\omega_r}(F_1^{\natural\infty},\ldots,F_r^{\natural\infty})\right)^{d_{r+1}}}$$

où d_{r+1} est un entier majorant tous les $\omega(\alpha^{(i)})$, $Q = t_1\mathbf{X}^{\alpha^{(1)}}+\ldots+t_k\mathbf{X}^{\alpha^{(k)}}+1$ et $Q^\natural$ est son homogénéisé en poids d_{r+1} par la variable X_{r+1}.

Par conséquent, pour toute fonction multisymétrique $f \in \mathfrak{I}_n^r(\mathbb{Z})$, son évaluation en $\mathfrak{z}$ est de la forme :

$$f(\mathfrak{z}) = \frac{P(F_1,\ldots,F_r)}{\left(\mathrm{Res}^{(d_1,\ldots,d_r)}_{\omega_1,\ldots,\omega_r}(F_1^{\natural\infty},\ldots,F_r^{\natural\infty})\right)^s}$$

pour un P à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et s entier.

Remarque : On peut aussi considérer ce théorème comme point de départ pour exprimer les résultants en fonction des polynômes multisymétriques des zéros. ⊡

▷ **Exemple :** Considérons les polynômes en X, Y :

$$F = a_{20}X^2 + a_{11}XY + a_{02}Y^2 + a_{10}X + a_{01}Y + a_{00}$$
$$G = b_{20}X^2 + b_{11}XY + b_{02}Y^2 + b_{10}X + b_{01}Y + b_{00}$$

Nous avons calculé la somme de puissance $p_{1,1}$ évaluée au multi-ensemble des solutions d'un tel système.

Pour cela, nous avons d'abord calculé :

$$S = \mathrm{Res}^{(2,2)}_{1,1}(a_{20}X^2 + a_{11}XY + a_{02}Y^2, a_{20}X^2 + a_{11}XY + a_{02}Y^2)$$

Ce sont deux formes binaires, donc S est donné par le déterminant de la matrice de Sylvester associée. On obtient :

$$\begin{aligned} S = {} & {a_{0,2}}^2{b_{2,0}}^2 - 2\,a_{0,2}a_{2,0}b_{0,2}b_{2,0} + {a_{2,0}}^2{b_{0,2}}^2 \\ & - a_{0,2}a_{1,1}b_{1,1}b_{2,0} - a_{1,1}a_{2,0}b_{0,2}b_{1,1} + a_{0,2}a_{2,0}{b_{1,1}}^2 + {a_{1,1}}^2b_{0,2}b_{2,0} \end{aligned}$$

Nous avons ensuite calculé :

$$R = \mathrm{Res}^{(2,2,2)}_{1,1,1}(F^\natural, G^\natural, Z^2 + tXY)$$

où :

$$\begin{aligned} F^\natural &= a_{20}X^2 + a_{11}XY + a_{02}Y^2 + a_{10}XZ + a_{01}YZ + a_{00}Z^2 \\ G^\natural &= b_{20}X^2 + b_{11}XY + b_{02}Y^2 + b_{10}XZ + b_{01}YZ + b_{00}Z^2 \end{aligned}$$

Pour ce calcul, nous avons utilisé une formule classique de Salmon ([74], Art. 90, ou [19], formule (2.8)). Nous en avons extrait le coefficient C de t. Il est trop long pour que nous en donnions la formule ici : c'est un polynôme de degré 8 en les 12 coefficients de F et G, constitué de 124 termes. Ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{Q}[a_{2,0}, a_{1,1}, \ldots, b_{0,0}]$. En particulier, la formule donnant $p_{1,1}(\mathfrak{z})$ comme fraction rationnelle des coefficients :

$$p_{1,1}(\mathfrak{z}) = C/S^2$$

ne se simplifie pas en une formule polynomiale.

Nous avons vérifié qu'en annulant tous les coefficients sauf $a_{2,0}$ et $b_{0,2}$, spécialisés en 1, et $a_{1,0}$ et $b_{0,1}$, laissés indéterminés, de sorte que le système devient :

$$F = X(X + a_{1,0}), \qquad G = Y(Y + b_{0,1})$$

et a comme solutions : $(0,0), (-a_{1,0}, 0), (0, -b_{0,1})$ et $(-a_{1,0}, -b_{0,1})$, on obtient bien $p_{1,1}(\mathfrak{z}) = a_{1,0}b_{0,1}$ ◁

Lorsque pour chaque i, le polynôme F_i a comme composante dominante une puissance de X_i, la formule de Poisson donne des expressions polynomiales des polynômes multisymétriques élémentaires en fonction des coefficients. Les systèmes de ce type sont l'objet d'étude de la section qui vient.

notes

- Les liens entre polynômes multisymétriques et résultants sont aussi abordés dans [70].

4.4 Cas des systèmes de Pham généralisés

Rappelons que pour un polynôme unitaire univarié $F \in \mathbb{K}[X]$, les sommes de puissances évaluées en le multi-ensemble $\mathfrak{z}$ de ses zéros dans $\mathbb{L}$ sont données par un développement en série suivant les puissances décroissantes de X :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{p_k(\mathfrak{z})}{X^k} = \frac{X\,F'(X)}{F(X)} \tag{4.7}$$

Dans cette section nous montrons qu'il existe des formules analogues pour une certaine classe de systèmes polynomiaux à plusieurs variables : les sytèmes de Pham généralisés.

Nous commençons par les définitions et des considérations générales sur ces systèmes. Puis nous énonçons les analogues de 4.7 associés (les *identités d'Aizenberg-Kytmanov*), ainsi que des formules voisines. Les démonstrations sont reportées en fin de section, après qu'ait été présenté l'outil de preuve : le symbole de Kronecker, avatar de l'opérateur de résidu global.

Les résulats de cette section ne sont pas nouveaux. Ils sont principalement dus à Aizenberg, Tsikh et Kytmanov ([2, 3, 4], voir aussi [12] dans lesquels tous ces résultats sont rassemblés) et clarifiés et étendus par Cattani, Dickenstein et Sturmfels [16].

Notons néanmoins que notre présentation est complètement algébrique, et reste valable en toute caractéristique, comme tous les résultats de ce chapitre.

4.4.1 Systèmes de Pham généralisés

Nous définissons ici les sytèmes de Pham généralisés, et nous en donnons des propriétés.

Définition 4.3 *Soit une famille $F = (F_1, \dots, F_r)$ de polynômes, éléments de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_r]$ avec :*

$$\begin{array}{rccc} F_1 = & X_1^{\delta_1} & + & R_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_r = & X_r^{\delta_r} & + & R_r \end{array}$$

S'il existe un ordre monomial admissible $\preceq$. tel que pour chaque i, le terme dominant de F_i est $X_i^{\delta_i}$, alors on dira que le système est un système de Pham généralisé. *Un ordre $\preceq$ comme ci-dessus, nous le dirons* compatible *au système $F = (F_1, \dots, F_r)$. Le vecteur d'entiers $(\delta_1, \dots, \delta_r)$ sera appelé la* silhouette *du système de Pham généralisé.*

Soit un poids $\omega \in (\mathbb{N}^*)^r$. Ce poids gradue $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_r]$. Nous dirons que ω est *compatible* au système de Pham F si pour chaque i, le monôme $X_i^{\delta_i}$ est la composante homogène de poids maximal de F_i.

Remarque : Les *systèmes de Pham* sont les systèmes de Pham généralisés avec poids compatible $\omega = (1, 1, \dots, 1)$. Certains des résultats énoncés dans cette section ont été formulés d'abord par Aizenberg et Kytmanov pour les systèmes de Pham, puis pour les systèmes de Pham généralisés avec ordre compatible l'ordre du degré total lexicographique. Le cadre naturel pour ces résultats est celui des systèmes de Pham généralisés. C'est ce cadre qui est adopté dans [16]. $\boxdot$

Remarque : Tout système de Pham admet des poids compatibles. Un système de Pham généralisé définit donc une intersection complète stricte, et bénéficie donc des propriétés qui leurs sont associées, énoncées dans la section 4.3. $\boxdot$

Un système de Pham généralisé a aussi les propriétés suivantes :

Proposition 4.13

- *Soit $\preceq$ un ordre compatible au système de Pham F. Alors F est une base de Gröbner (de l'idéal enendré par $F_1, \ldots, F_r$) pour cet ordre.*
- *Le système d'équations $F_1 = \ldots = F_r = 0$ a toujours un nombre fini de solutions dans $\mathbb{L}^r$. Le nombre de ses solutions dans $\mathbb{L}^r$ (comptées avec multiplicités) est $n = \delta_1 \cdots \delta_r$.*

Preuve : Pour toute paire de polynômes F_i, F_j du système, leur S-polynôme est $X_j^{\delta_j} R_i - X_i^{\delta_i} R_j$. Pour tout monôme M dans R_i (resp. dans R_j), on a la réduction $X_j^{\delta_j} M \mapsto_F -R_j M$ (resp.$X_j^{\delta_i} M \mapsto_F -R_i M$), qui donne une combinaison linéaire de monômes irréductibles. On en déduit que $X_j^{\delta_j} R_i - X_i^{\delta_i} R_j$ se réduit en $-R_j R_i - (-R_i) R_j = 0$. Ceci montre que F est une base de Gröbner.

L'ensemble des monômes irréductibles est l'ensemble des $\mathbf{X}^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^r$ avec $\forall i, \quad \alpha_i \leq \delta_i$. Ils sont au nombre de $n = \delta_1 \cdots \delta_r$. Ils forment une base de l'algèbre-quotient $A = \mathbb{K}[\mathbf{X}]/\langle F \rangle$. Cette algèbre est donc de dimension finie n. Par suite, le système a un nombre fini de solutions dans $\mathbb{L}^r$, égal à n (lorsqu'elles sont comptées avec multiplicités). $\blacksquare$

Remarque : Réciproquement, soit une base de Gröbner d'un idéal zéro-dimensionnel, pour un ordre mononial $\preceq$. Alors elle contient comme sous-famille un système de Pham généralisé avec ordre compatible $\preceq$. $\boxdot$

Remarque : Les résultats de la section 4.2 sont donc aussi valables pour les systèmes de Pham généralisés. $\boxdot$

4.4.2 Une classe de relations de récurrence avec indices dans $\mathbb{Z}^r$

Il convient maintenant de faire digression sur certaines relations de récurrence pour des suites à indices dans $\mathbb{Z}^r$.

Soit une suite $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments d'un corps $\mathbb{K}$. Il est bien connu qu'établir une relation de récurrence pour (g_k) revient à présenter la série génératrice des g_k par développement en série d'une fraction rationnelle. Il y a toujours deux façons de développer en série une fraction rationnelle univariée : suivant les puissances croissantes, ou suivant les puissances décroissantes. Dans l'étude des relations entre coefficients et racines d'un polynôme univarié, le développement suivant les puissances décroissantes est souvent le plus adapté.

▷ **Exemple :** Rappelons l'identité que nous voulons généraliser (la formule (4.7)) : soit U un polynôme univarié unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit $\mathfrak{z}$ le multi-ensemble de ses zéros dans $\mathbb{L}$. Alors la série génératrice suivante des sommes de puissances des racines :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(\mathfrak{z})}{X^k}$$

est le développement en série de puissances décroissantes de $X\,U'(X)/U(X)$ (poser $t = -1/X$, on retrouve la formule 1.7). Et la série génératrice suivante des sommes complètes des zéros :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k(\mathfrak{z})}{X^k}$$

est le développement en séries de puissances décroissantes de $X^n/U(X)$. ◁

La traduction entre relations de récurrence et fractions rationnelles peut se formuler ainsi :

Proposition 4.14 *Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la série génératrice $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{g_k}{X^k}$ est obtenue par développement suivant les puissances décroissantes d'une fraction rationnelle $R(X)$.*
2. *$g_k = 0$ pour $k \ll 0$, et il existe des éléments $a_0, \ldots, a_{d-1}$ de $\mathbb{K}$, tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, sauf pour un nombre fini :*

$$g_k + a_{d-1}g_{k-1} + \ldots + a_1 g_{k-d+1} + a_0 g_{k-d} = 0$$

Lorsque ces conditions sont vérifiées, définissons les éléments c_k de $\mathbb{K}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_{d-k} = g_k + a_{d-1}g_{k-1} + \ldots + a_1 g_{k-d+1} + a_0 g_{k-d}$$

Et posons :

$$P = \sum_k c_k X^k, \qquad Q = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$$

Alors $R = P/Q$ et $g_k = 0$ pour $k < \deg Q - \deg P$

On peut ainsi calculer chaque terme d'une telle suite g_k grâce aux relations de récurrence. Les conditions initiales sont données par : $g_k = 0$ pour $k \ll 0$.

Nous présentons ici une généralisation particulière pour des suites indexées par des r-uplets d'entiers et leurs séries génératrices multivariées. Cette généralisation est adaptée aux analogues multivariés de (4.7) qui vont apparaître pour les systèmes de Pham généralisés.

Nous considérons des indéterminées $X_1, \ldots, X_r$, et l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ des séries formelles de la forme $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^r} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$. Remarquons que cet espace est un module sur l'anneau des polynômes de Laurent.

Soit $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^r} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha \in \mathcal{L}$. Son *diagramme de Newton* est l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{Z}^r$ tels que $a_\alpha \neq 0$. Il sera noté $\mathcal{D}(S)$. Le diagramme de Newton d'un polynôme de Laurent Q est fini et son enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^r$ est un polytope à sommets entiers. Il est appelé *polytope de Newton* de Q et nous le noterons $\mathcal{P}(Q)$. Rappelons aussi que la *somme de Minkowski* de deux parties S, T de $\mathbb{R}^r$ est :

$$S + T = \{\alpha + \beta | \alpha \in S,\ \beta \in T\}$$

Pour $S \subset \mathbb{R}^r$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose aussi :

$$\lambda \cdot S = \{\lambda \cdot \alpha | \alpha \in S\}$$

Si S et T sont des polytopes, alors $S+T$ et $\lambda \cdot S$ aussi. Un sommet de $\mathcal{P}(Q)$ est un $\delta \in \mathcal{D}(Q)$ tel qu'il existe un poids $\omega \in \mathbb{Z}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ pour lequel :

- Le polytope $\mathcal{P}(P)$ est contenu dans le demi-espace $\omega \leq \omega(\delta)$.
- L'intersection de $\mathcal{P}(P)$ avec l'hyperplan $\omega = \omega(\delta)$ est réduite au point δ.

On dira d'un tel poids ω qu'*il définit le sommet δ de $\mathcal{P}(Q)$*. Si P et Q sont des polynômes de Laurent, alors $\mathcal{P}(P \cdot Q) = \mathcal{P}(P) + \mathcal{P}(Q)$. De plus, si δ est un sommet de $\mathcal{P}(P \cdot Q)$ défini par le poids ω, alors il existe une unique décomposition $\delta = \alpha + \beta$ telle que α et β soient des sommets, respectivement de $\mathcal{P}(P), \mathcal{P}(Q)$, définis par ω.

Soit H un polynôme de Laurent avec $\mathbf{0} \notin \mathcal{P}(H)$. Alors il existe un poids $\omega \in \mathbb{Z}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $\mathcal{P}(H)$ soit contenu dans le demi-espace $\omega \leq -1$. On a donc que $\mathcal{P}(H^k)$ est contenu dans le demi-espace $\omega \leq -k$. Par conséquent, la somme infinie $1 - H + H^2 - H^3 + \ldots$ définit bien un élément S de $\mathcal{L}$, qui vérifie $S \cdot (1 + H) = 1$.

Définition 4.4 *Soit $R \in \mathbb{K}(X_1, \ldots, X_r)$. Soient P, Q des polynômes de Laurent tels que $R = P/Q$. Soit δ un sommet de $\mathcal{P}(Q)$. On peut poser $Q = a_\delta \mathbf{X}^\delta (1 + H)$. Alors $\mathbf{0} \notin \mathcal{P}(H)$. Le* développement de R à partir du sommet δ du polytope de Newton de son dénominateur Q *est la série formelle :*

$$\frac{P\mathbf{X}^{-\delta}}{a_\delta}(1 - H + H^2 - H^3 + \ldots)$$

On la notera $\mathrm{Serie}_{Q,\delta}(R)$.

Remarque : Écrivons R comme quotient de deux polynômes irréductibles : $R = P_0/Q_0$. Alors $\mathrm{Serie}_{Q,\delta}(R) = \mathrm{Serie}_{Q_0,\gamma}(R)$ pour un certain sommet γ de $\mathcal{P}(Q_0)$. Pour voir ceci, choisissons un poids $\omega \in \mathbb{Z}^r$ qui définisse le sommet δ de $\mathcal{P}(Q)$. Soit T le polynôme de Laurent tel que $Q = T \cdot Q_0, P = T \cdot P_0$. Alors il existe une unique décomposition $\delta = \gamma + \beta$ avec γ, β sommets de $\mathcal{P}(Q_0), \mathcal{P}(T)$ respectivement, définis par ω. Soit $\mathcal{L}_\omega$ le sous-espace de $\mathcal{L}$ formé des $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^r} g_\alpha / \mathbf{X}^\alpha$ vérifiant les deux conditions : (i) $g_\alpha = 0$ pour $\omega(\alpha) \ll 0$ et (ii) pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des α avec $\omega(\alpha) = k$ et $g_\alpha \neq 0$ est fini. On voit facilement que le produit usuel des séries formelles est bien défini sur $\mathcal{L}_\omega$, qui est donc un anneau. Dans cet anneau, Q et Q_0 sont inversibles d'inverses respectifs $\mathrm{Serie}_{Q,\delta}(1/Q)$ et $\mathrm{Serie}_{Q_0,\gamma}(1/Q_0)$ (T est donc aussi inversible), et :

$$\mathrm{Serie}_{Q,\delta}(R) = P \cdot Q^{-1} = P_0 \cdot T \cdot T^{-1} \cdot Q_0^{-1} = P_0 \cdot Q_0^{-1} = \mathrm{Serie}_{Q,\gamma}(R)$$

$\boxdot$

Pour plus sur ces notions, et par exemple des problèmes de convergence, nous renvoyons le lecteur intéressé à [30], ch. 6, par.1.

Définition 4.5 *Définissons le* cône de Q relativement à δ *comme le cône de sommet* $\mathbf{0}$ *engendré par le polytope obtenu de* $\mathcal{P}(Q)$ *par la translation qui amène* δ *en* $\mathbf{0}$. *On le note* $\mathcal{C}(Q;\delta)$. *On a donc :*

$$\mathcal{C}(Q;\delta) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda \cdot (\{-\delta\} + \mathcal{P}(Q))) \tag{4.8}$$

Remarquons que, avec les notations de la définition, on a $\mathcal{P}(H) \subset \mathcal{P}(Q) + \{-\delta\}$. Donc $\mathcal{P}(H^k) = k \cdot \mathcal{P}(H) \subset \mathcal{C}(Q;\delta)$ pour tout k. On en déduit que $\mathcal{D}(1 - H + H^2 - H^3 + \ldots) \subset \mathcal{C}(Q;\delta)$, et donc que :

$$\mathcal{D}(\mathrm{Serie}_{Q,\delta}(R)) \subset \mathcal{C}(Q;\delta) + \{-\delta\} + \mathcal{P}(P) \tag{4.9}$$

$\triangleright$ **Exemple :** Soit Q un polynôme de Laurent univarié en X, de degré maximal d et degré minimal w. Alors son polytope de Newton est l'intervalle $[w,d]$ de $\mathbb{R}$. Son sommet w est défini par les poids $\omega \in \mathbb{Z}$ strictement négatifs. Le développement de $1/Q$ à partir de w est le développement suivant les puissances croissantes de X. Et $\mathcal{C}(Q;w) = [0;+\infty[$. Son sommet d est défini par les poids $\omega \in \mathbb{Z}$ strictement positifs. Le développement de $1/Q$ à partir de d est le développement suivant les puissances décroissantes de X. Et $\mathcal{C}(Q;d) =]-\infty;0]$. $\triangleleft$

Alors on a l'analogue suivant de la proposition 4.14 :

Proposition 4.15 *Soit $(g_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^r}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une fraction rationnelle R, un dénominateur Q de R et un sommet δ de $\mathcal{P}(Q)$ tels que :*

$$\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^r} \frac{g_\gamma}{\mathbf{X}^\gamma} = \mathrm{Serie}_{Q,\delta}(R)$$

2. *Il existe un poids $\omega \in \mathbb{Z}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$, des éléments a_α de $\mathbb{K}$ nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux, un $\tau \in \mathbb{Z}^r$ pour lequel $a_\tau \neq 0$, tels que :*
   - *$g_\gamma = 0$ pour $\omega(\gamma) \ll 0$*
   - *Si $\alpha \neq \tau$ et $a_\alpha \neq 0$ alors $\omega(\alpha) < \omega(\tau)$.*
   - *Pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^r$, sauf pour un nombre fini,*

$$a_\tau g_\gamma + \sum_{\substack{\beta-\alpha=\gamma-\tau\\ \alpha\neq\tau}} a_\alpha g_\beta = 0$$

Dans ce cas, définissons les éléments c_γ par :

$$\forall\gamma\in\mathbb{Z}^r, \quad c_{\tau-\gamma} = a_\tau g_\gamma + \sum_{\substack{\beta-\alpha=\gamma-\tau\\ \alpha\neq\tau}} a_\alpha g_\beta$$

Posons aussi :

$$P = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^r} c_\alpha \mathbf{X}^\alpha, \qquad Q = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^r} a_\alpha \mathbf{X}^\alpha$$

Alors $R = P/Q$ et $\delta = \tau$. Le poids ω définit le sommet δ dans $\mathcal{P}(Q)$. Enfin si $(-\gamma) \notin \mathcal{C}(Q;\delta) + \{-\delta\} + \mathcal{P}(P)$ alors $g_\gamma = 0$.

On sait donc calculer chaque terme g_γ d'une telle suite, grâce aux relations de récurrence. Il faut calculer les g_γ en suivant les $\omega(\gamma)$ croissants. Les conditions initiales sont données par : $g_\gamma = 0$ pour $\omega(\gamma) \ll 0$.

Preuve : Le démonstration est triviale, excepté en ce qui concerne les résultats d'annulation, mais celui-ci vient directement de la formule 4.9 ci-dessus. ■

4.4.3 Les identités d'Aizenberg-Kytmanov

Nous présentons les identités d'Aizenberg-Kytmanov, qui se spécialisent en les identités de Newton dans le cas univarié. Nous utilisons la présentation "développement de fraction rationnelle".

Théorème 4.16 *Soit F un système de Pham généralisé de silhouette δ (donc δ est un sommet de $\mathcal{P}(F_1\cdots F_r)$). Soit $\mathfrak{z}$ le multi-ensemble des zéros de F dans $\mathbb{L}^r$. Il existe une famille $(g_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{Z}^r}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que :*

- *Pour tout* $\gamma \in \mathbb{N}^r$, $\quad g_\gamma = p_\gamma(\mathfrak{z})$.
- $g_\gamma = 0$ *pour* $\gamma \notin (-\mathcal{C}_\delta(F_1 \cdots F_r))$.
- *Et :*
$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^r} \frac{g_\gamma}{X^\gamma} = \mathrm{Serie}_{F_1 \cdots F_r, \delta} \left(\frac{X_1 \cdots X_r \cdot \mathrm{Jac}_F}{F_1 \cdots F_r} \right)$$

où Jac_F *est le déterminant Jacobien de* $F = (F_1, \ldots, F_r)$.

La démonstration de ce théorème est repoussée à 4.4.5.

Les identités de récurrence correspondant à cette formule sont les *identités d'Aizenberg-Kytmanov* :

Corollaire 4.17 *La suite* $(g_\gamma)_\gamma$ *du théorème 4.16 vérifie les relations :*

$$\begin{aligned} \forall \gamma \in \mathbb{Z}^r, \quad g_\gamma + & \sum_{\alpha^{(1)} + \ldots + \alpha^{(r)} - \beta = \delta - \gamma} a^{(1)}_{\alpha^{(1)}} \cdots a^{(r)}_{\alpha^{(r)}} \, g_\beta \\ & = \sum_{\alpha^{(1)} + \ldots + \alpha^{(r)} = \delta - \gamma} \det\left(\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)}\right) a^{(1)}_{\alpha^{(1)}} \cdots a^{(r)}_{\alpha^{(r)}} \end{aligned}$$

où $a^{(i)}_\alpha$ *est le coefficient de* $\mathbf{X}^\alpha$ *dans* F_i.

Preuve : La seule chose qui nécessite démonstration est le développement du terme de droite. Il s'agit de montrer que le coefficient de $\mathbf{X}^{\beta - \mathbf{1}}$ dans Jac_F est :
$$\sum_{\alpha^{(1)} + \ldots + \alpha^{(r)} = \beta} \det\left(\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)}\right) a^{(1)}_{\alpha^{(1)}} \cdots a^{(r)}_{\alpha^{(r)}}$$
Il suffit de remarquer que pour l'application multilinéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathbf{X}] \times \cdots \times \mathbb{K}[\mathbf{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathbf{X}] \\ (P_1, \ldots, P_r) & \longmapsto & X_1 \cdots X_r \, \mathrm{Jac}_{(P_1, \ldots, P_r)} \end{array}$$

on a, pour une suite de monômes :

$$(\mathbf{X}^{\alpha^{(1)}}, \ldots, \mathbf{X}^{\alpha^{(r)}}) \longmapsto \det\left(\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)}\right) \mathbf{X}^{\alpha^{(1)} + \ldots + \alpha^{(r)}} \tag{4.10}$$

■

Voici un théorème semblable au théorème 4.16, plus général, mais qui fait intervenir des objets moins élémentaires (le déterminant d'une matrice de transformation T) :

Théorème 4.18 *Soit* J *une intersection complète stricte de* $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$, *de présentation* $J = < G_1, \ldots, G_r >$ *comme intersection complète stricte. Soit* $\mathfrak{z}$ *le multi-ensemble de ses zéros dans* $\mathbb{L}^r$. *Soit* ω *un poids compatible. Il existe un système de Pham généralisé* $F = (F_1, \ldots, F_r)$ *de poids compatible* ω

engendrant un idéal contenu dans I. Soit $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$ sa silhouette. Soit T une matrice carrée telle que :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_r \end{bmatrix}$$

Alors il existe une famille $(g_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^r}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que :

- *Pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^r$, $g_\gamma = p_\gamma(\mathfrak{z})$.*
- *Si $\gamma \notin [0, \delta_1 - 1] \times \cdots \times [0, \delta_r - 1] + (-\mathcal{C}(F_1 \cdots F_r; \delta))$ alors $g_\gamma = 0$.*
- $$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^r} \frac{g_\gamma}{X^\gamma} = \mathrm{Serie}_{F_1 \cdots F_r, \delta} \left(\frac{X_1 \cdots X_r \cdot N_F(\det T \cdot \mathrm{Jac}_G)}{F_1 \cdots F_r} \right)$$

où $N_F(P)$ désigne la forme normale d'un polynôme P relativement à la base de Gröbner F.

La preuve de ce théorème est repoussée à la section 4.4.5.

Comme corollaire, on obtient une formule trouvée par Jacobi [39] et démontrée par Paul Pedersen [61] :

Corollaire 4.19 *(*Formule de Jacobi-Pedersen*)*

Soit I une intersection complète zéro-dimensionnelle de $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$, de présentation $I =< G_1, \ldots, G_r >$. Soit $\mathfrak{z}$ le multi-ensemble de ses zéros dans $\mathbb{L}^r$. Soient $U_1, \ldots, U_r$ des polynômes univariés dans I, en $X_1, \ldots, X_r$ respectivement. Soit T une matrice carrée telle que :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_r \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_r \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{N}^r} \frac{p_\gamma(\mathfrak{z})}{X^\gamma} = \frac{X_1 \cdots X_r}{U_1 \cdots U_r} \cdot N_U(\det T\, \mathrm{Jac}_G)$$

où chaque $1/U_i$ est développé en série suivant les puissances décroissantes de X_i.

Les relations de récurrence correspondantes sont :

$$\forall \gamma \in \mathbb{Z}^r, \quad p_\gamma(\mathfrak{z}) + \sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma \\ \alpha \in \mathbb{N}^r \setminus \{\mathbf{0}\}}} e_{\alpha_1 \xi_1}(\mathfrak{z}) \cdots e_{\alpha_r \xi_r}(\mathfrak{z})\, p_\beta(\mathfrak{z}) = c_{\delta-\gamma}$$

où c_α est le coefficient de $\mathbf{X}^\alpha$ dans la forme normale $N_U(\det T\, \mathrm{Jac}_G)$.

Preuve : Pour démontrer ce corollaire à partir du théorème 4.18, il suffit de remarquer d'abord que les polynômes $U_1, \ldots, U_r$ forment bien un système de Pham généralisé (n'importe quel poids $\omega \in (\mathbb{N}^*)^r$) lui est compatible), et ensuite que le cône associé $\mathcal{C}(U_1 \cdots U_r; \delta)$ est contenu dans $(-\mathbb{N}^r)$, d'où il s'ensuit que tous les g_γ pour $\gamma \notin \mathbb{N}^r$ sont nuls. ■

4.4.4 Le symbole de Kronecker

Dans cette section nous présentons l'outil fondamental de démonstration des théorèmes énoncés ci-dessus : le symbole de Kronecker. Nous suivons la présentation faite dans [6] et [32].

On considère I un idéal zéro-dimensionel de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_r]$. Soit $\mathfrak{z} = [a, b, \ldots, z]$ le multi-ensemble de ses zéros dans $\mathbb{L}^r$.

On suppose de plus que I est une intersection complète. Alors $\mathbb{A}$ est une algèbre de Frobenius : il existe une forme linéaire

$$\phi \colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{K}$$

dite *dualisante*, telle que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{A}, \mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & (y \mapsto \phi(x \cdot y)) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Calcul de symbole de Kronecker

Nous rappelons comment calculer une telle forme linéaire dualisante. Comme I est intersection complète, il admet une famille génératrice à r éléments : $I = \langle F_1, \ldots, F_r \rangle$. On considère $\mathbb{A} = \mathbb{K}[\mathbf{X}]/I$.

Pour $P \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ et $1 \leq i \leq n$ on définit

$$\partial_i(P) \in \mathbb{K}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_r]$$

comme suit :

$$\partial_i(P) \quad = \quad \frac{P(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, X_i, \ldots, X_r) - P(Y_1, \ldots, Y_i, X_{i+1}, \ldots, X_r)}{X_i - Y_i}$$

Alors le déterminant de la matrice des $\partial_j(F_i)$ pour $1 \leq i, j \leq r$ (un élément de $\mathbb{K}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$) est appelé le *déterminant bezoutien* associé à $F_1, \ldots, F_r$, notons-le Bez.

On peut considérer son image dans $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{A} \cong \mathbb{K}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]/J$ où J est l'idéal engendré par $F_1(\mathbf{X}), \ldots, F_r(\mathbf{X}), F_1(\mathbf{Y}), \ldots, F_r(\mathbf{Y})$.

Soit $\{\varepsilon_i : 1 \leq i \leq n\}$ une base de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{A}$. Il existe une décomposition :

$$\mathrm{Bez} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \otimes \widehat{\varepsilon_i} \mod J$$

pour certains $\widehat{\varepsilon_i}$. Alors les $\widehat{\varepsilon_i}$ forment aussi une base de $\mathbb{A}$ (la base duale de celle des ε_i), et étant donnée une décomposition de 1 dans $\mathbb{A}$ suivant cette base duale :

$$1 = \sum_{i=1}^{n} d_i \widehat{\varepsilon_i}$$

la forme linéaire sur $\mathbb{A}$ définie par :

$$\varepsilon_i \mapsto d_i$$

est dualisante. Cette forme $\ell_F = \ell_{[F_1,\ldots,F_r]}$ est appelée *Symbole de Kronecker* associée à $F_1, \ldots, F_r$, ou encore *Opérateur de résidu global.* En effet, quand $\mathbb{K}$ est un sous-corps du corps des nombres complexes, le symbole de Kronecker coïncide avec le résidu classique défini par :

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} P \cdot \mathrm{d}X \\ F_1 \cdot \ldots \cdot F_r \end{bmatrix} = \frac{1}{(2i\pi)^r} \int \frac{P \cdot \mathrm{d}X_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}X_r}{F_1 \cdot \ldots \cdot F_r}$$

où l'intégration porte sur une chaîne convenable autour des racines [83, 16].

Calcul du symbole de Kronecker pour un système de Pham généralisé

Considérons l'exemple très spécial d'un système de Pham généralisé :

$$\begin{aligned} F_1 &= X_1^{\delta_1} + R_1 \\ &\vdots \\ F_r &= X_r^{\delta_r} + R_r \end{aligned}$$

Alors l'algèbre $\mathbb{A}$ admet comme base la famille des images des $\mathbf{X}^\alpha$ où $\forall i, \alpha_i < \delta_i$. Soit $\preceq$ un ordre compatible au système de Pham. Remarquons qu'on peut écrire, pour tous $i \neq j$:

$$\partial_j(F_i) = \frac{b_{i,j}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{X_j}, \quad \partial_j(F_j) = \frac{X_j^{\delta_j} + b_{j,j}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{X_j}$$

où les $b_{i,j}$, vus comme des polynômes en $\mathbf{X}$ à coefficients dans $\mathbb{K}[\mathbf{Y}]$, ont tous leurs monômes plus petits que $X_i^{\delta_i}$ respectivement à $\preceq$. Par suite, en développant le déterminant bezoutien on obtient :

$$\mathrm{Bez} = \frac{(X_1^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot X_r^{\delta_r} + R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))}{X_1 \cdot \ldots \cdot X_r}$$

où tous les monômes en $\mathbf{X}$ de R sont plus petits que $X_1^{\delta_1} \cdots X_r^{\delta_r}$. Autrement dit :

$$\mathrm{Bez} = X_1^{\delta_1 - 1} \cdot \ldots \cdot X_r^{\delta_r - 1} + R_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

où tous les monômes en $\mathbf{X}$ de R_1 sont plus petits que $X_1^{\delta_1-1}\cdots X_r^{\delta_r-1}$.

La réduction de R_1 – respectivement à $F_1(\mathbf{X}),\ldots,F_r(\mathbf{X})$ et $F_1(\mathbf{Y}),\ldots,F_r(\mathbf{Y})$ – jusqu'à sa forme normale ne produit jamais le monôme $X_1^{\delta_1-1}\cdots X_r^{\delta_r-1}$, et donc :

$$\mathrm{Bez} = X_1^{\delta_1-1}\cdots X_r^{\delta_r-1} + \sum_{\beta_i<\delta_i, i=1\ldots r} \mathbf{X}^{\beta}\otimes\widehat{\varepsilon}_{\beta} \mod J$$

En particulier, $\widehat{\varepsilon}_{(\delta_1-1,\ldots,\delta_r-1)} = 1$, et donc, si pour tout i, $0 \le \alpha_i < \delta_1$ alors :

$$\ell_F(\mathbf{x}^{\alpha}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = (\delta_1-1,\ldots,\delta_r-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi :

Proposition 4.20 *Pour un système de Pham généralisé F de silhouette $(\delta_1,\ldots,\delta_r)$, la forme ℓ_F donne le coefficient du terme en $X_1^{\delta_1-1}\cdot\ldots\cdot X_r^{\delta_r-1}$ dans la forme normale relativement à F.*

Soit g une forme linéaire sur $\mathbb{A}$, il existe donc un polynôme P (unique *modulo* I) tel que pour tout Q on ait : $g(Q) = \ell_F(P\cdot Q)$. Il est obtenu par :

$$P = \sum_{i=1}^{n} g(\varepsilon_i)\cdot\hat{\varepsilon}_i \mod I$$

Si g est la forme linéaire Tr_I alors le déterminant Jacobien de la suite de polynômes $(F_1,\ldots,F_r)$ convient :

$$\forall Q, \quad \mathrm{Tr}_I(Q) = \ell_F(\mathrm{Jac}_F \cdot Q) \tag{4.11}$$

La loi de transformation

Un outil très utile pour manipuler le symbole de Kronecker est la *Loi de Transformation* :

Proposition 4.21 *(Loi de Transformation)*

Soient $G_1,\ldots,G_r$ des éléments de $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ avec un nombre fini de solutions communes dans $\mathbb{L}^r$ et tels que :

$$\begin{array}{lllll} G_1 & = T_{11}F_1+ & \ldots & +T_{1r}F_r & \\ \vdots & \quad\vdots & & \quad\vdots & T_{ij}\in\mathbb{K}[\mathbf{X}] \\ G_r & = T_{r1}F_1+ & \ldots & +T_{rr}F_r & \end{array} \tag{4.12}$$

Alors pour tout $P \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ on a :

$$\ell_F(P) = \ell_G(P\cdot\det(T))$$

Preuve : Pour une preuve algébrique de ce résultat nous renvoyons le lecteur intéressé à [15] ou [72]. ∎

Le théorème d'Euler-Jacobi pour les systèmes de Pham généralisés

On introduit maintenant un théorème d'annulation de ℓ_F.

Théorème 4.22 *(*Le théorème d'Euler-Jacobi pour les systèmes de Pham généralisés*)*

Soit F un système de Pham généralisé de silhouette δ. Soit $P \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$. Si $\mathcal{P}(P)$ ne rencontre pas $\{\delta - \mathbf{1}\} + (-\mathcal{C}(F_1 \cdots F_r; \delta))$ alors $\ell_F(P) = 0$.

Preuve : Notons $\mathcal{S}(F)$ le semi-groupe engendré par les $\delta - \alpha$ pour $\alpha \in \cup_{i=1}^{n} \mathcal{P}(F_i)$. Tous les polynômes obtenus par réductions successives *modulo* F à partir de P ont leur diagramme de Newton contenu dans $\mathcal{P}(P) + \mathcal{S}(F)$. C'est le cas en particulier pour la forme normale $N_F(P)$. D'après la proposition 4.20, on aura $\ell_F(P) = \ell_F(N_F(P)) = 0$ si $\delta \notin \mathcal{D}(N_F(P))$. *A fortiori*, $\ell_F(P) = 0$ si $\delta \notin \mathcal{P}(P) + \mathcal{S}(F)$. Cette condition est équivalente à : $\mathcal{P}(P)$ ne rencontre pas $\{\delta - \mathbf{1}\} + (-\mathcal{S}(F))$. Mais $\{\delta\} + (-\mathcal{S}(F)) \subset \{\delta - \mathbf{1}\} + \mathcal{C}(F_1 \cdots F_r; \delta)$ (*cf.* la présentation (4.8)), d'où le résultat. ∎

Corollaire 4.23 *(Le théorème d'Euler-Jacobi pour les intersections complètes strictes) Soit une intersection complète stricte, de présentation $\langle G_1, \ldots, G_r \rangle$. Soit $\omega \in (\mathbb{N}^*)^r$ un poids compatible. Pour tout $P \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ on a :*

$$\deg_\omega(P) < \sum_{i=1}^{n} \deg_\omega(G_i) - |\omega| \Rightarrow \ell_G(P) = 0$$

Preuve : Notons $H_1, \ldots, H_r$ les composantes homogènes dominantes respectives de $G_1, \ldots, G_r$ relativement à ω. D'après le Nullstellensatz dans l'espace projectif anisotrope (4.9), il existe des polynômes T_{ij} homogènes relativement à ω tels que :

$$\left\{ \begin{array}{llll} X_1^{\rho_1} & = T_{11} \cdot H_1 & + \ldots & + T_{1r} \cdot H_r \\ \vdots & \quad \vdots & & \quad \vdots \\ X_r^{\rho_r} & = T_{r1} \cdot H_1 & + \ldots & + T_{rr} \cdot H_r \end{array} \right. \tag{4.13}$$

(on a donc $\deg_\omega T_{ij} = \omega_i \rho_i - \deg_\omega(F_j)$). On pose alors :

$$\left\{ \begin{array}{llll} F_1 & = T_{11} \cdot G_1 & + \ldots & + T_{1r} \cdot G_r \\ \vdots & \quad \vdots & & \quad \vdots \\ F_r & = T_{r1} \cdot G_1 & + \ldots & + T_{rr} \cdot G_r \end{array} \right. \tag{4.14}$$

Alors F est un système de Pham généralisé, et, d'après la loi de transformation :

$$\ell_G(P) = \ell_F(P \cdot \det(T))$$

Comme $\det(T)$ est homogène, de degré $\sum \omega_i \rho_i - \sum \deg_\omega(F_i)$ (relativement à ω), on en déduit le corollaire. ∎

Le théorème de Macaulay anisotrope

Théorème 4.24 *Soit $\omega \in (\mathbb{N}^*)^r$ un poids, et $H_1, \ldots, H_r$ des polynômes homogènes respectivement à ω, et sans zéro commun non-trivial dans $\mathbb{L}^r$. Soit P un polynôme homogène respectivement à ω. Si $\deg_\omega(P) > \sum \deg_\omega(H_i) - |\omega|$ alors P est dans l'idéal $\langle H_1, \ldots, H_r \rangle$.*

Preuve : On choisit $\rho_1, \ldots, \rho_r$ et T comme dans (4.13). Alors :

$$\ell_H(P) = \ell_{[X_1^{\rho_1}, \ldots, X_r^{\rho_r}]}(P \cdot \det(T)) = 0$$

dès que $\mathcal{D}(P)$ ne rencontre pas $(\rho_1 - 1, \ldots, \rho_r - 1) + (-\mathcal{D}(\det(T)))$. Ce dernier ensemble est contenu dans l'hyperplan des $\alpha \in \mathbb{Z}^r$ tels que $\omega(\alpha) = \sum \deg_\omega(H_i) - |\omega|$. Ainsi si P est homogène de degré plus grand que ce nombre, alors $\ell_H(P) = 0$, et plus encore : $\ell_H(P \cdot Q) = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{K}[\mathbf{X}]$. Mais ceci implique que P appartient à l'idéal $\langle H_1, \ldots, H_r \rangle$, puisque le symbole de Kronecker est dualisant. ∎

4.4.5 Preuve des identités d'Aizenberg-Kytmanov

En utilisant les outils développés ci-dessus on démontre maintenant les deux théorèmes 4.16 et 4.18.

Soient $F_1, \ldots, F_r$ des polynômes tels que $X_1 \cdot F_1, \ldots, X_r \cdot F_r$ n'ont qu'un nombre fini de zéros communs dans $\mathbb{L}^r$. Soit I l'idéal engendré par $F_1, \ldots, F_r$. Soit g une forme linéaire sur $\mathbb{A} = \mathbb{K}[\mathbf{X}]/I$. Soit P un polynôme tel que $g(Q) = \ell_F(P \cdot Q)$ pour tout Q.

On étend le symbole de Kronecker ℓ_F en une forme linéaire $\widetilde{\ell}_F$ sur l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{K}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}]$. Il suffit de définir sa valeur en les monômes de Laurent. Pour $\alpha \in \mathbb{Z}^r$ on pose :

$$\widetilde{\ell}_F(\mathbf{X}^\alpha) = \ell_{[X_1^{\alpha_1^-} F_1, \ldots, X_r^{\alpha_n^-} F_r]}(\mathbf{X}^{\alpha^+})$$

où $\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$, et $\alpha^+, \alpha^- \in \mathbb{N}^r$ (la Loi de transformation, 4.21, assure de la cohérence de la définition, malgré la liberté laissée dans le choix de α^+ et α^-).

Alors :

Lemme 4.25 *Les coefficients des F_i et les $\widetilde{\ell}_F(X^\beta P)$ sont liés par les relations :*

$$\forall \gamma \in \mathbb{Z}^r, \qquad \sum_{\alpha-\beta=-\gamma} a_\alpha \widetilde{\ell}_F(\mathbf{X}^\beta P) = c_{-\gamma-\mathbf{1}}$$

où a_α (resp. c_α) est le coefficient de $\mathbf{X}^\alpha$ dans le produit $F_1 \cdots F_r$ (resp. dans P).

Preuve : La preuve est simple. Il s'agit de développer les expressions $t_\gamma := \widetilde{\ell}_F(\mathbf{X}^\gamma \cdot P \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_r), \quad \gamma \in \mathbb{Z}^r$ de deux façons différentes. D'abord en simplifiant par $F_1 \cdot \ldots \cdot F_r$ à l'aide de la Loi de Transformation :

$$\begin{aligned}
t_\gamma &= \ell_{[X_1^{\gamma_1^-} F_1, \ldots, X_r^{\gamma_n^-} F_r]}(\mathbf{X}^{\gamma^+} \cdot P \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_r) \\
&= \ell_{[X_1^{\gamma_1^-+1} F_1, \ldots, X_r^{\gamma_n^-+1} F_r]}(\mathbf{X}^{\gamma^+} \cdot X_1 \cdots X_r\, P \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_r) \\
&= \ell_{[X_1^{\gamma_1^-+1}, \ldots, X_r^{\gamma_r^-+1}]}(\mathbf{X}^{\gamma^+} \cdot X_1 \cdots X_r\, P) \\
&= \sum_\beta c_\beta \ell_{[X_1^{\gamma_1^-+1}, \ldots, X_r^{\gamma_r^-+1}]}(\mathbf{X}^{\gamma^+ + \beta + \mathbf{1}}) \\
&= c_{-\gamma-\mathbf{1}}
\end{aligned}$$

Mais on peut aussi développer le produit $F_1 \cdots F_r$, ce qui donne :

$$t_\gamma = \sum_\alpha a_\alpha \widetilde{\ell}_F(\mathbf{X}^{\gamma+\alpha} \cdot P)$$

■

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 4.26 *Soit J un idéal zéro-dimensionnel de $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$. Soit f une forme linéaire sur $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ qui s'annule sur J. Soit $F = (F_1, \ldots, F_r)$ un système de Pham généralisé engendrant un idéal I contenu dans J. Soit $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$ sa silhouette. Il existe un polynôme P (unique* modulo *I) tel que pour tout polynôme Q, $f(Q) = \ell_F(PQ)$. Pour tout tel polynôme P, il existe une famille $(g_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{Z}^r}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, tels que :*

- *Pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^r$, $g_\gamma = f(\mathbf{X}^\gamma)$.*
- *Si $\gamma \notin \mathcal{P}(P) + (-\mathcal{C}(F_1 \cdots F_r; \delta)) + \{\delta\}$ alors $g_\gamma = 0$.*
- *Et :*

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^r} \frac{g_\gamma}{X^\gamma} = \mathrm{Serie}_{F_1 \cdots F_r, \delta}\left(\frac{X_1 \cdots X_r \cdot P}{F_1 \cdots F_r}\right)$$

Réciproquement, si les conditions ci-dessus sont vérifiées, alors $f(Q) = \ell_F(PQ)$ pour tout Q.

Preuve : La forme linéaire f s'annule sur I donc induit une forme linéaire g sur $\mathbb{A} = \mathbb{K}[\mathbf{X}]/I$. Comme ℓ_F est dualisante, il existe P tel que pour tout Q, $\ell_F(PQ) = g(Q) = f(Q)$. On pose $g_\gamma = \widetilde{\ell_F}(\mathbf{X}^\gamma)$ pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^r$. Pour $\gamma \in \mathbb{N}^r$ on a donc bien $g_\gamma = f(\mathbf{X}^\gamma)$. Nous voulons appliquer le théorème 4.15 sur les relations de récurrence multivariées à cette suite. Soit ω un poids compatible à F. Considérons la relation donnée par le lemme 4.25. Elle s'écrit :

$$\forall \gamma \in \mathbb{Z}^r, \quad g_\gamma + \sum_{\substack{\alpha-\beta=-\gamma \\ \alpha \neq \gamma}} a_\alpha g_\beta = c_{-\gamma-1}$$

D'après le théorème d'Euler-Jacobi pour les systèmes de Pham généralisés (théorème 4.22), on a que $g_\gamma = 0$ dès que :

$$\deg_\omega(\mathbf{X}^{\gamma^+} P) < \sum_i \deg_\omega(X_i^{\gamma_i^-} F_i) - |\omega|$$

autrement dit dès que :

$$\omega(\gamma) < \omega(\delta) - |\omega| - \deg_\omega(P)$$

On est bien dans les conditions d'application de 4.15. On en déduit la formule du théorème, et le résultat d'annulation.

Pour la réciproque : la formule détermine entièrement les $f(\mathbf{X}^\alpha)$ à partir de P, donc détermine entièrement f. ■

Les théorèmes énoncés précedemment sont des corollaires de ce théorème.

Preuve du théorème 4.16 : Dans le théorème ci-dessus 4.26, on choisit $I = J$, l'idéal engendré par les polynômes $F_1, \ldots, F_r$ du système de Pham généralisé, et $f = \mathrm{Tr}_I$ la forme linéaire *trace* associée. Alors un polynôme P tel que $\mathrm{Tr}_I(Q) = \ell_F(PQ)$ pour tout polynôme Q est Jac_F, le Jacobien de $(F_1, \ldots, F_r)$ (formule 4.11). On a donc, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^r$, que $g_\gamma = \mathrm{Tr}_I(\mathbf{X}^\gamma) = p_\gamma(\mathfrak{z})$.

En ce qui concerne le résultat d'annulation des g_γ, il suffit de remarquer que le polytope $\mathcal{P}(X_1 \cdots X_r \, \mathrm{Jac}_F)$ est contenu dans $\mathcal{P}(F_1 \cdots F_r)$ (ceci d'après la formule 4.10). Ainsi :

$$\mathcal{P}(X_1 \cdots X_r \cdot \mathrm{Jac}_F) + \{-\delta\} \subset \mathcal{P}(F_1 \cdots F_r) + \{-\delta\} \subset \mathcal{C}(F_1 \cdots F_r; \delta)$$

et donc :

$$\mathcal{P}(X_1 \cdots X_r \cdot \mathrm{Jac}_F) + (-\mathcal{C}(F_1 \cdots F_r; \delta)) + \{-\delta\} \subset (-\mathcal{C}(F_1 \cdots F_r; \delta))$$

puisque $\mathcal{C}(F_1 \cdots F_r; \delta)$ est stable par somme. ■

Preuve du théorème 4.18 : Nous avons déjà expliqué, à la suite de l'énoncé du théorème 4.18, pourquoi il existe un système de Pham généralisé $F = (F_1, \ldots, F_r)$ engendrant un idéal J contenu dans I, et un poids ω compatible à la fois à F et à l'intersection complète stricte G.

Démontrons ce qui reste à démontrer. D'après la formule (4.11) et la loi de transformation (proposition 4.21), on a pour tout polynôme Q :

$$\mathrm{Tr}_J(Q) = \ell_G(Q\,\mathrm{Jac}_G) = \ell_F(Q \det T \cdot \mathrm{Jac}_G)$$

On applique donc le théorème 4.26 en prenant pour P la forme normale de $\det T \cdot \mathrm{Jac}_G$ relativement à F, on a bien pour tout polynôme Q :

$$\ell_F(Q \det T \cdot \mathrm{Jac}_G) = \ell_F(QP)$$

puisque $Q \det T \cdot \mathrm{Jac}_G$ et QP sont égaux *modulo* F. On a donc bien, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^r$, que $g_\gamma = \mathrm{Tr}_J(\mathbf{X}^\gamma) = p_\gamma(\mathfrak{z})$.

Le résultat d'annulation du théorème 4.18 est déduit immédiatement de celui du théorème 4.26. Il suffit de remarquer que puisque P est une forme normale relativement à F, son polytope de Newton est contenu dans $[0, \delta_1 - 1] \times \cdots \times [0, \delta_r - 1]$, l'ensemble des exposants des monômes irréductibles modulo F. ■

Annexe A

Quelques remarques d'algèbre multilinéaire

Soit $\mathcal{V}$ un module libre de rang fini sur un anneau commutatif A (souvent A sera un corps).

Nous notons $S^n\mathcal{V}$ la n-ième puissance symétrique de $\mathcal{V}$. Rappelons que c'est le quotient de la puissance tensorielle $\otimes^n\mathcal{V}$ par l'idéal engendré par les éléments :

$$v^{(1)} \otimes v^{(2)} \otimes \ldots \otimes v^{(n)} - v^{(\sigma(1))} \otimes v^{(\sigma(2))} \otimes \ldots \otimes v^{(\sigma(n))}$$

pour $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$ parcourant chacun $\mathcal{V}$ et σ parcourant l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. L'image d'un tenseur simple $v^{(1)} \otimes v^{(2)} \otimes \ldots \otimes v^{(n)}$ est notée $v^{(1)}v^{(2)} \cdots v^{(n)}$.

Un objet différent est le sous-espace de $\otimes^n\mathcal{V}$ formé des tenseurs symétriques, c'est-à-dire invariants par l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\otimes^n\mathcal{V}$ définie par :

$$\sigma(v^{(1)} \otimes v^{(2)} \otimes \ldots \otimes v^{(n)}) = v^{(\sigma^{-1}(1))} \otimes v^{(\sigma^{-1}(2))} \otimes \ldots \otimes v^{(\sigma^{-1}(n))}$$

pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et les $v^{(i)}$ dans $\mathcal{V}$. Nous notons $T^n_{sym}\mathcal{V}$ cet espace.

Rappelons que le morphisme de $T^n_{sym}\mathcal{V}$ dans $S^n\mathcal{V}$ induit par le passage au quotient de $\otimes^n\mathcal{V}$ sur $S^n\mathcal{V}$ est un isomorphisme lorsque $n!$ est inversible dans A, mais qu'en revanche si cette dernière condition n'est plus vérifiée, ce morphisme n'est plus toujours surjectif. C'est pourquoi nous nous garderons d'indentifier $S^n\mathcal{V}$ et $T^n_{sym}\mathcal{V}$.

Nous notons $S\mathcal{V}$ l'algèbre symétrique de $\mathcal{V}$. Rappelons que c'est l'espace vectoriel :

$$S\mathcal{V} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n\mathcal{V}$$

muni du produit déterminé par :

$$(v^{(1)}v^{(2)} \cdots v^{(n)}) \cdot (w^{(1)}w^{(2)} \cdots w^{(k)}) = v^{(1)}v^{(2)} \cdots v^{(n)}w^{(1)}w^{(2)} \cdots w^{(k)}$$

pour les $v^{(i)}$ et les $w^{(j)}$ dans $\mathcal{V}$.

Dans cette annexe nous expliquons quelques points d'algèbre multilinéaire utilisés dans le mémoire :

- Pourquoi le dual de $S^n\mathcal{V}$ s'identifie à $T^n_{sym}\mathcal{V}^*$.
- Pourquoi l'ensemble des fonctions polynomiales sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$ s'identifie à $S^n\mathcal{V}^*$.
- Comment nous faisons le lien entre la polarisation définie dans la section 1.2.3 et la présentation plus classique *via* des opérateurs différentiels.

Identification naturelle de $(S^n\mathcal{V})^*$ et $T^n_{sym}(\mathcal{V}^*)$

Comme $S^n\mathcal{V}$ est obtenu par passage au quotient de $\otimes^n\mathcal{V}$ modulo les relations :

$$v^{(1)} \otimes v^{(2)} \otimes \ldots \otimes v^{(n)} = v^{(\sigma(1))} \otimes v^{(\sigma(2))} \otimes \ldots \otimes v^{(\sigma(n))}$$

et comme $(\otimes^n\mathcal{V})^*$ s'identifie canoniquement à l'espace des formes n-linéaires sur $\mathcal{V}^n$, il vient que $(S^n\mathcal{V})^*$ s'identifie canoniquement à l'espace des formes n-linéaires symétriques sur $\mathcal{V}^n$.

Rappelons qu'il existe un isomorphisme canonique entre $\otimes^n\mathcal{V}^*$ et l'espace des formes n-linéaires sur $\mathcal{V}^n$, qui consiste à envoyer $f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$ sur la fonction :

$$(v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}) \mapsto f_1(v^{(1)}) \cdots f_n(v^{(n)})$$

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\otimes^n\mathcal{V}^*$ par :

$$\sigma(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = f_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma^{-1}(n)}$$

et il agit aussi sur l'espace des formes n-linéaires sur $\mathcal{V}^n$ par :

$$\begin{aligned} \sigma(F) &= F \circ \sigma^{-1} \\ &= (v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}) \mapsto F(v^{(\sigma(1))}, \ldots, v^{(\sigma(n))}) \end{aligned}$$

Par conséquent, l'isomorphisme canonique entre $\otimes^n\mathcal{V}^*$ et l'espace des formes n-linéaires sur $\mathcal{V}^n$ préserve l'action de $\mathfrak{S}_n$, et donc induit un isomorphisme entre les sous-espaces invariants, à savoir $T^n_{sym}\mathcal{V}^*$ et le sous-espace des formes n-linéaires symétriques, que nous avons déjà identifié à $(S^n\mathcal{V})^*$.

Fonctions polynomiales sur $\mathcal{V}$

Dans le cas où $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps algébriquement clos $\mathbb{L}$, nous serons appelé à considérer les fonctions polynomiales sur $\mathcal{V}$. Par définition, ce sont les sommes finies d'applications $u \mapsto M(u, \ldots, u)$ pour M forme multilinéaire sur un produit cartésien de copies de $\mathcal{V}$. Comme $\mathcal{V}$ est de dimension finie, toute forme multilinéaire M

est somme d'applications du type $(u^{(1)},\ldots,u^{(d)}) \mapsto f_1(u^{(1)})\cdots f_d(u^{(d)})$ avec les f_i dans $\mathcal{V}^*$. Dans ce cas donc, les fonctions polynomiales sont les éléments de l'image du morphisme de $S\mathcal{V}^*$ dans l'espace des fonctions de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{L}$ déterminé par $f_1\cdots f_d \mapsto (\vec{u} \mapsto f_1(\vec{u})\cdots f_d(\vec{u}))$. Ce morphisme est injectif (parce que $\mathbb{L}$ est infini), les fonctions polynomiales s'identifient ainsi aux éléments de $S\mathcal{V}^*$.

Polarisation des fonctions polynomiales

Nous commençons par reprendre la définition abstraite de la polarisation donnée en section 1.2.3. Soit V un A-module libre de rang fini et r un entier positif.

Soit l'application diagonale :

$$\begin{array}{ccc} V & \to & \oplus^r V \\ v & \mapsto & (v,\ldots,v) \end{array}$$

Pour $v \in V$ nous notons $v_{(1)} = (v,0,\ldots,0)$, $v_{(2)} = (0,v,0,\ldots,0)$, *etc.*.. Alors l'application diagonale consiste à remplacer v par $v_{(1)}+\ldots+v_{(r)}$. Elle induit un morphisme d'algèbres :

$$\Delta^r : SV \to S(\oplus^r V) \cong \otimes^r SV$$

L'algèbre $\otimes^r SV$ est naturellement munie d'une multigraduation à valeurs dans $\mathbb{Z}^r$. Nous notons $\Delta^r_\alpha(F)$ la composante homogène de multidegré $\alpha \in \mathbb{N}^r$ de $\Delta^r(F)$. Le morphisme Δ^r_α est appelé *opérateur d'α-polarisation.*

Nous considérons maintenant le cas où V est l'espace des formes A-linéaires sur $\mathcal{V}$. Nous pouvons considérer l'application linaíre :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}^r & \to & \mathcal{V} \\ (v^{(1)},\ldots,v^{(r)}) & \mapsto & v^{(1)}+\ldots+v^{(r)} \end{array}$$

Sa transposée est précisément l'application diagonale :

$$\begin{array}{ccc} V & \to & (\mathcal{V}^r)^* \cong \oplus_r V \\ f & \mapsto & \big((v^{(1)},\ldots,v^{(r)}) \mapsto \sum_i f(v_i)\big) \end{array}$$

Considérons la formule de Taylor pour une fonction polynomiale homogène de degré k, $F \in S^k V$, en supposant que $k!$ est inversible dans A :

$$F(\sum_{i=1}^r t_i v^{(i)}) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^r \\ |\alpha|=k}} D^\alpha F(v^{(1)},\ldots,v^{(r)})\frac{t_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\cdots\frac{t_r^{\alpha_r}}{\alpha_r!}$$

et identifions avec :

$$\Delta_r(F)(t_1v^{(1)},\ldots,t_rv^{(r)}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^r} \Delta^r_\alpha(F)(v^{(1)},\ldots,v^{(r)})t_1^{\alpha_1}\cdots t_r^{\alpha_r}$$

Il vient que :

$$D^\alpha F = \alpha!\Delta^r_\alpha F$$

Annexe B

Programmes en Maple

Nous avons implémenté en Maple des procédures pour exprimer les diffŕentes familles de polynômes multisymétriques les unes en fonction des autres. Nous illustrons ces procédures en calculant la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des fonctions monomiales suivant les produits de sommes de puissances, dans la composante de multidegré $(2, 1, 1)$ de l'algèbre de MacMahon $\mathfrak{M}^r(\mathbb{Q})$. La procédure utilisée renvoie une liste de deux éléments. Le premier est une suite de matrices : elles correspondent aux partitions du vecteur $(2, 1, 1)$, chaque partition étant donnée par les colonnes de la matrice associée. Ce sont ces partitions de vecteur qui indicent les produits de sommes de puissances et les fonctions monomiales de multidegré $(2, 1, 1)$.

```
> read "conversions.txt";

> U:=`VSYMF/table/m2p`([2,1,1]):

> U[1];
```

$$[\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}]$$

```
> U[2];
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

La dernière colonne, par exemple, donne l'expression de $m_{[\xi_1^2\xi_2\xi_3]}$. On peut obtenir cette expression directement :

```
> `VSYMF/m2p`(m[[1,0,0]$2,[0,1,0],[0,0,1]]);
```

$$\begin{aligned} &1/2\,p_{1,0,0}{}^2 p_{0,1,0} p_{0,0,1} - 1/2\,p_{1,0,0}{}^2 p_{0,1,1} - p_{1,1,0} p_{1,0,0} p_{0,0,1} - p_{1,0,1} p_{1,0,0} p_{0,1,0} \\ &+2\,p_{1,1,1} p_{1,0,0} - 1/2\,p_{2,0,0} p_{0,1,0} p_{0,0,1} + 1/2\,p_{2,0,0} p_{0,1,1} + p_{1,1,0} p_{1,0,1} \\ &+p_{2,1,0} p_{0,0,1} + p_{2,0,1} p_{0,1,0} - 3\,p_{2,1,1} \end{aligned}$$

Pour la conjecture de Foulkes-Howe, une procédure produit les partitions de vecteur de n en n parts de norme n :

```
> L:=ListeH(3);
```

$$\begin{gathered} L := [\,[\,[3,0,0],[0,3,0],[0,0,3]\,]\,,\,[\,[2,1,0],[1,2,0],[0,0,3]\,]\,, \\ [\,[3,0,0],[0,2,1],[0,1,2]\,]\,,\,[\,[2,1,0],[1,1,1],[0,1,2]\,]\,,\,[\,[2,1,0],[1,0,2],[0,2,1]\,]\,, \\ [\,[2,0,1],[1,2,0],[0,1,2]\,]\,,\,[\,[2,0,1],[1,1,1],[0,2,1]\,]\,,\,[\,[2,0,1],[1,0,2],[0,3,0]\,]\,, \\ [\,[1,2,0],[1,1,1],[1,0,2]\,]\,,\,[\,[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]\,]\,] \end{gathered}$$

Nous pouvons présenter les partitions de vecteur sous forme de matrices, comme précédemment :

```
>map(`VPART/mat`,L);
```

$$\left[\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

Ce sont tous les carrés semi-magiques d'ordre n et de somme magique n, à l'ordre près des colonnes.

La matrice M dont les colonnes sont les coordonnées des produits de polynômes multisymétriques homogènes de multidegré $(3, 3, 3)$ suivant les fonctions monomiales homogènes dans $\mathfrak{D}_3^3(\mathbb{Q})$ est produite :

```
>M:=matriceEM(L,3);
```

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 3 & 3 & 6 & 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

On l'inverse :

```
>M1:=linalg[inverse](M);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 33 & -3 & -3 & -3 & 6 & 6 & -3 & -3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La première colonne de l'inverse $M1$ donne les coordonnées de $m_{[(3\xi_1)(3\xi_2)(3\xi_3)]}$ suivant les produits de polynômes multisymétriques homogènes, c'est le certificat qui a été exhibé dans la section 3.5.

Bibliographie

[1] Alejandro Adem, John Maginnis, and R. James Milgram. Symmetric invariants and cohomology of groups. *Math. Ann.*, 287(3) :391–411, 1990.

[2] L. A. Aĭzenberg. A formula for a generalized multidimensional logarithmic residue, and the solution of systems of nonlinear equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 234(3) :505–508, 1977. Trad. ang. dans *Sov. Math. Dokl.* 18 (1977), 691–695.

[3] L. A. Aĭzenberg and A. M. Kytmanov. Multidimensional analogues of Newton's formulas for systems of nonlinear algebraic equations and some of their applications. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 22(2) :19–30, 1981. English transl. in *Sib.Math.J.*, 22(1981),180–189.

[4] L.A. Aĭzenberg and A.K. Tsikh. Application of multidimensional logarithmic residue to systems of nonlinear algebraic equations. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 20(4) :699–707, 1979. English transl. in *Sib.Math.J.*, 20 485–491 (1980).

[5] George E. Andrews. *The theory of partitions.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976.

[6] E. Becker, J. P. Cardinal, M.-F. Roy, and Z. Szafraniec. Multivariate Bezoutians, Kronecker symbol and Eisenbud-Levine formula. In *Algorithms in algebraic geometry and applications (Santander, 1994)*, pages 79–104. Birkhäuser, Basel, 1996.

[7] E. A. Bender and J. R. Goldman. On the applications of Möbius inversion in combinatorial analysis. *Amer. Math. Monthly*, 82(8) :789–803, 1975.

[8] J.P.M. Binet. Mémoire sur un système de formules analytiques, et leurs applications à des considérations géométriques. *J. Ec. Polyt,*, 9(16) :280–302, 1812.

[9] S. C. Black and R. J. List. A note on plethysm. *European J. Combin.*, 10(1) :111–112, 1989.

[10] Michel Brion. Stable properties of plethysm : on two conjectures of Foulkes. *Manuscripta Math.*, 80(4) :347–371, 1993.

[11] Michel Brion. Sur certains modules gradués associés aux produits symétriques. In *Algèbre non commutative, groupes quantiques et invariants (Reims, 1995)*, pages 157–183. Soc. Math. France, Paris, 1997.

[12] Valery Bykov, Alexander Kytmanov, and Mark Lazman. *Elimination methods in polynomial computer algebra.* Mathematics and its applications, 448. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998. Eng. transl. and rev. from the 1991 Russ. original by Kytmanov and.

[13] Geoffrey B. Campbell. Combinatorial identities related to vector partitions. Technical Report Mathematics Research Report MRR 063-96, Centre for Mathematics and its Applications, School of Mathematics Science, Australian National University,Canberra ACT0200, Australia, December 1996.

[14] H. E. A. Campbell, I. Hughes, and R. D. Pollack. Vector invariants of symmetric groups. *Canad. Math. Bull.*, 33(4) :391–397, 1990.

[15] J. P. Cardinal and B. Mourrain. Algebraic approach of residues and applications. In *The mathematics of numerical analysis (Park City, UT, 1995)*, pages 189–210. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[16] E. Cattani, A. Dickenstein, and B. Sturmfels. Computing multidimensional residues. In *Algorithms in algebraic geometry and applications (Santander, 1994)*, pages 135–164. Birkhäuser, Basel, 1996.

[17] S. Collart, M. Kalkbrener, and D. Mall. Converting bases with the Gröbner walk. *J. Symb. Comput.*, 24 :465–469, 1997.

[18] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, varieties and algorithms.* UTM. Springer-Verlag, New York, 1992.

[19] David Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Using algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[20] Henry H. Crapo. Permanents by Möbius inversion. *J. Combinatorial Theory*, 4 :198–200, 1968.

[21] John Dalbec. *Geometry and combinatorics of Chow forms.* PhD thesis, Cornell University, 1995.

[22] John Dalbec. Multisymmetric functions. *Beiträge Algebra Geom.*, 40(1) :27–51, 1999.

[23] Igor Dolgachev. Weighted projective varieties. In *Group actions and vector fields (Vancouver, B.C., 1981)*, pages 34–71. Springer, Berlin, 1982.

[24] Peter Doubilet. On the foundations of combinatorial theory. VII. Symmetric functions through the theory of distribution and occupancy. *Studies in Appl. Math.*, 51 :377–396, 1972.

[25] David Eisenbud. *Commutative algebra.* Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[26] Mark Feshbach. The mod 2 cohomology rings of the symmetric groups and invariants. *Topology*, 41(1) :57–84, 2002.

[27] P. Fleischmann. A new degree bound for vector invariants of symmetric groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(4) :1703–1712, 1998.

[28] H. O. Foulkes. Concomitants of the quintic and sextic up to degree four in the coefficients of the ground form. *J. London Math. Soc.*, 25 :205–209, 1950.

[29] A. M. Garsia and I. Gessel. Permutation statistics and partitions. *Adv. in Math.*, 31(3) :288–305, 1979.

[30] I. M. Gel′fand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.

[31] I. M. Gessel. Enumerative applications of symmetric functions. In *Actes du 17ème séminaire Lotharingien*, volume 348/S-17, pages 5–21. Publ. IMRA, Strasbourg, 1988.

[32] María-José González-López and Laureano González-Vega. Newton identities in the multivariate case : Pham systems. In *Gröbner bases and applications (Linz, 1998)*, pages 351–366. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[33] Laureano González-Vega, Fabrice Rouillier, and Marie-Françoise Roy. *Symbolic recipes in polynomial system solving*, chapter 2. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[34] Paul Gordan. Das Zerfallen der Kurven in gerade Lienien. *Math. Ann.*, 45 :410–427, 1894.

[35] Hoon Hong. Groebner basis under composition. I. *J. Symbolic Comput.*, 25(5) :643–663, 1998.

[36] Roger Howe. $(\mathrm{gl}_n, \mathrm{gl}_m)$-duality and symmetric plethysm. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 97(1-3), 1987.

[37] Shou-Jen Hu and Ming-chang Kang. Efficient generation of the ring of invariants. *J. Algebra*, 180(2) :341–363, 1996.

[38] Anthony Iarrobino and Vassil Kanev. *Power sums, Gorenstein algebras, and determinantal loci.* Lecture Notes in Mathematics, 1721. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[39] C. Jacobi. Theoremata nova algebrica systema duarum aequationum inter duas cariabiles propositarum. *J. Reine Angew. Math.*, 14 :281–288, 1835. en latin.

[40] F. Joachimstal. De aequationibus quarti et sexti gradus quae in theoria linearum superficierum secundi gradus occurunt. *Crelle J.*, 53 :149–172, 1856.

[41] J.-P. Jouanolou. Le formalisme du résultant. *Adv. Math.*, 90(2) :117–263, 1991.

[42] Friedrich Junker. *Über algebraische Correspondenzen.* PhD thesis, Eberhard-Karls-Universität, Tübingen, 1889.

[43] Friedrich Junker. Die Relationen, welche zwischen den elementaren symmetrische Functionen bestehen. *Math. Ann.*, 38 :91–114, 1890.

[44] Friedrich Junker. Über symmetrische Functionen von mehreren Reihen von Veränderlichen. *Math. Ann.*, 43 :225–270, 1893.

[45] Friedrich Junker. Die symmetrischen Functionen und die Relationen zwischen der Elementarfunctionen derselben. *Math. Ann.*, 45 :1–84, 1894.

[46] Friedrich Junker. *Die symmetrischen Functionen der gemeinschaftlichen Variablenpaare ternärer Formen. Tafeln der ternären symmetrischen Functionen vom Gewicht 1 bis 6.* K. K. Hof- und Staatsdruckerei, 1897. Wien.

[47] Friedrich Junker. Die Differentialgleichungen der Invarianten und Semiinvarianten einer binären (ternären) Form. *Math. Ann.*, 64 :328–343, 1907.

[48] Martin Kreuzer and Ernst Kunz. Traces in strict Frobenius algebras and strict complete intersections. *J. Reine Angew. Math.*, 381 :181–204, 1987.

[49] Alain Lascoux and Marcel-Paul Schützenberger. Formulaire raisonné de fonctions symétriques, Octobre 1985. L.I.T.P., Université de Paris 7.

[50] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1995.

[51] Percy A. MacMahon. Memoir on symmetric functions of the roots of systems of equations. *Phil. Trans.*, 181 :481–536, 1890.

[52] Percy A. MacMahon. *Combinatory analysis, vol.2, sec. XI.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1916.

[53] Magma. Computational Algebra Group, School of Mathematics and Statistics University of Sydney NSW 2006 Australia, `http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/`.

[54] Henryk Minc. *Permanents.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 6.

[55] Henryk Minc. Evaluation of permanents. *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, 22(1) :27–32, 1979.

[56] Bernard Mourrain and Olivier Ruatta. Relation between roots and coefficients, interpolation and application to system solving. preprint, 2001.

[57] Amnon Neeman. Zero cycles in $\mathbb{P}^n$. *Adv. Math.*, 89(2) :217–227, 1991.

[58] Emmy Noether. Der Endlichkeitssatz der invarianten endlicher gruppen. *Math.Ann.*, 77 :89–92, 1916. Reprinted in 'Collected Papers',pp. 181–184, Springer-Verlag, Berlin, (1983).

[59] Peter J. Olver. *Classical invariant theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[60] Peter J. Olver and Chehrzad Shakiban. Dissipative decomposition of partial differential equations. *Rocky Mountain J. Math.*, 22(4) :1483–1510, 1992.

[61] Paul Pedersen. Calculating multidimensional symmetric functions using Jacobi's formula. In *Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (New Orleans, LA, 1991)*, pages 304–317. Springer, Berlin, 1991.

[62] David R. Richman. Explicit generators of the invariants of finite groups. *Adv. Math.*, 124(1) :49–76, 1996.

[63] David R. Richman. Invariants of finite groups over fields of characteristic p. *Adv. Math.*, 124(1) :25–48, 1996.

[64] John Riordan. *An introduction to combinatorial analysis.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1958.

[65] Mercedes H. Rosas. MacMahon symmetric functions, the partition lattice, and Young subgroups. *J. Combin. Theory Ser. A*, 96(2) :326–340, 2001.

[66] Gian-Carlo Rota. On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 2 :340–368, 1964.

[67] Gian-Carlo Rota and Joel A. Stein. Plethystic algebras and vector symmetric functions. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 91(26) :13062–13066, 1994.

[68] Gian-Carlo Rota and Joel A. Stein. Plethystic Hopf algebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 91(26) :13057–13061, 1994.

[69] Gian-Carlo Rota and Joel A. Stein. A formal theory of resultants (i) :an algorithm in invariant theory. In H. Crapo and D. Senato, editors, *Algebraic combinatorics and computer science*, pages 267–314. Springer, 2001.

[70] Gian-Carlo Rota and Joel A. Stein. A formal theory of resultants (ii) :a constructive definition of the resultant. In H. Crapo and D. Senato, editors, *Algebraic combinatorics and computer science*, pages 315–342. Springer, 2001.

[71] Fabrice Rouiller, Marie-Françoise Roy, and Aviva Szpirglas. Multivariate symmetric functions and polynomial system solving. 1995.

[72] Marie-Françoise Roy and Aviva Szpirglas. Bezoutiens et résidus, affines, projectifs et dans le tore. Prépublication 98–15, IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France, Mai 1999.

[73] Bruce E. Sagan. *The symmetric group.Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.* Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1991.

[74] G. Salmon. *Lessons introductory to modern higher algebra.* Hodges, Foster and Co., Dublin, 1876.

[75] Ludwig Schläfli. Über die Resultante eines sytemes mehrerer algebraischen Gleichungen. *Vienna Academy Denkschriften*, 4, 1852.

[76] Larry Smith. *Polynomial invariants of finite groups.* A.K. Peters Ltd., Wellesley, MA, 1995.

[77] Richard P. Stanley. Invariants of finite groups and their applications to combinatorics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 1(3) :475–511, 1979.

[78] Serguei A. Stepanov. On vector invariants of the symmetric group. *Discrete Math. Appl.*, 6(2) :135–147, 1996.

[79] Serguei A. Stepanov. Polynomial invariants of finite groups over fields of prime characteristic. *Diskret. Mat.*, 11(3) :3–14, 1999.

[80] Serguei A. Stepanov. Transcendence bases of the algebra of vector invariants for a symmetric group. In *Number theory in progress, Vol. 1 (Zakopane-Kościelisko, 1997)*, pages 487–501. de Gruyter, Berlin, 1999.

[81] Bernd Sturmfels. *Algorithms in invariant theory.* Springer-Verlag, Vienna, 1993.

[82] Nicolas Thiéry. Personnal communication. 2001.

[83] A. K. Tsikh. *Multidimensional residues and their applications.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. Translated from the 1988 Russian original by E. J. F. Primrose.

[84] Sébastien Veigneau. *ACE, an Algebraic Combinatorics Environnment for the computer algebra system MAPLE : Users's reference manual, version 3.0.* Institut Gaspard Monge, 1998. `http://phalanstere.univ-mlv.fr/~ace`.

[85] Hermann Weyl. *The Classical Groups. Their Invariants and Representations.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1939.